



## Zestaw 15

---

### GIMNAZJUM

1. Punkty K i L są środkami odpowiednio podstaw AB i CD trapezu ABCD. Punkt P należy do odcinka KL. Udowodnij, że trójkąty ADP i BCP mają równe pola.
2. Czy istnieje taki trójkąt ostrokątny, w którym długości wszystkich boków i wszystkich wysokości są liczbami całkowitymi? Odpowiedź uzasadnij.
3. Wykaż, że jeśli liczby  $a$  i  $b$  są dodatnie i mniejsze od 1, to

$$a\sqrt{b} + b\sqrt{a} + 1 > 3ab$$

### LICEUM

1. Niech  $p$  będzie dowolną liczbą pierwszą. Udowodnij, że reszta z dzielenia liczby  $p$  przez 30 nie jest liczbą złożoną.
2. Wykaż, że niezależnie od wartości parametru  $m$  równanie
$$x^3 - (m + 1)x^2 + (m + 3)x - 3 = 0$$
ma pierwiastek całkowity.
3. Sprowadź do najprostszej postaci wyrażenie

$$\frac{(a^3 + b^3)(a^{-1} - b^{-1})}{(a^{-1} + b^{-1})[(a - b)^2 + ab]}$$