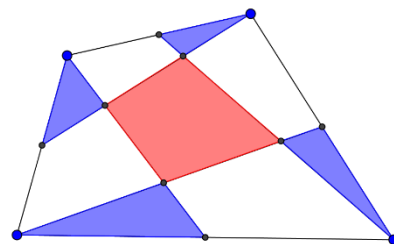




## Zestaw 17

### GIMNAZJUM

1. W czworokącie wypukłym środki boków połączono z wierzchołkami tak, jak na rysunku. Udowodnij, że pole czerwonego czworokąta jest równe sumie pól niebieskich trójkątów.



2. Udowodnij, że  $\underbrace{22 \dots 2}_n + \underbrace{33 \dots 3^2}_n = \underbrace{11 \dots 1}_{2n}$

3. Trójkąt równoboczny ABC wpisano w okrąg i na łuku AB obrano taki punkt P, że odcinek PC przecina bok AB w punkcie Q. Udowodnij, że

$$\frac{1}{PA} + \frac{1}{PB} = \frac{1}{PQ}$$

### LICEUM

1. Jacek zrobił sobie filiżankę kawy. Wypił pół filiżanki i dolał mleka do pełna. Czynność tę powtórzył kilka razy, za każdym razem wypijając dwa razy mniej niż poprzednio. Na końcu wypił wszystko do dna. Czego wypił więcej: kawy czy mleka?

2. W tablicy mnożenia wyróżniono tzw. gnomony (zob. rysunek). Udowodnij, że sumy liczb w gnomonach są sześcianami kolejnych liczb naturalnych.

3. Trójkąt równoboczny ABC wpisano w okrąg i na łuku AB obrano taki punkt P, że odcinek PC przecina bok AB w punkcie Q. Udowodnij, że

$$\frac{1}{PA} + \frac{1}{PB} = \frac{1}{PQ}$$

$1^3$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$2^3$	2	4	6	8	10	12	14	16	18
$3^3$	3	6	9	12	15	18	21	24	27
$4^3$	4	8	12	16	20	24	28	32	36
$5^3$	5	10	15	20	25	30	35	40	45
$6^3$	6	12	18	24	30	36	42	48	54
$7^3$	7	14	21	28	35	42	49	56	63
$8^3$	8	16	24	32	40	48	56	64	72
$9^3$	9	18	27	36	45	54	63	72	81