



## Zestaw 18

---

### GIMNAZJUM

1. Punkty  $K, L, M$  są punktami styczności okręgu wpisanego w trójkąt  $ABC$  z bokami tego okręgu. Wykaż, że trójkąt  $KLM$  jest ostrokątny.
2. Dane są trzy liczby rzeczywiste  $a, b, c$ . Wykaż, że
$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c)$$
3. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} (x + y)(x + y + z) = 72 \\ (y + z)(x + y + z) = 120 \\ (z + x)(x + y + z) = 96 \end{cases}$$

### LICEUM

1. W trójkącie prostokątnym wysokość ma długość  $n$  i dzieli jej spodek dzieli przeciwprostokątną na odcinki, których stosunek wynosi  $n$ . Oblicz  $n$  wiedząc, że pole trójkąta wynosi 20.
2. Udowodnij, że ułamek  $\frac{21n+4}{14n+3}$  jest nieskracalny dla każdej liczby naturalnej  $n$ .
3. W sześciokącie wypukłym  $ABCDEF$  zachodzą następujące równości:  $AB = BC, CD = DE, EF = FA$ . Wykaż, że proste zawierające wysokości trójkątów  $BCD, DEF$  i  $FAB$  poprowadzone odpowiednio z wierzchołków  $C, E, A$  przecinają się w jednym punkcie.