Zestaw 2

GIMNAZJUM

1. Rozwiąż w liczbach naturalnych równanie $\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=1$

2. Liczby a, b są dodatnie oraz liczby $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ i $(a-b)$ są wymierne. Udowodnij, że liczby $\sqrt{a}$ oraz $\sqrt{b}$ też są wymierne.

3. Spośród wszystkich wierzchołków dwunastokąta foremnego wybrano siedem. Czy możemy mieć pewność, że z tych siedmiu punktów możemy wybrać trzy, które są wierzchołkami trójkąta prostokątnego?

LICEUM

1. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych (x, y) dla których x^4+4y^4 jest liczbą pierwszą.

2. Dany jest taki trójkąt ABC, że $\sphericalangle ACB=30°$. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy R. Udowodnij, że pole trójkąta ABC jest mniejsze od R^2.

3. Niech p i q będą dwiema kolejnymi liczbami pierwszymi większymi od 2. Udowodnić, że liczba $p+q$ jest iloczynem co najmniej trzech (niekoniecznie różnych) liczb naturalnych większych od 1.

Rozwiązania należy oddać do piątku 29 września do godziny 15.00 koordynatorowi konkursu panu Jarosławowi Szczepaniakowi lub przesłać na adres jareksz@interia.pl do piątku 29 września do północy.

Uwaga! Ze względu na mój wyjazd na obóz naukowy następny zestaw ukaże się 8 października.