



Zestaw 3

GIMNAZJUM

1. Udowodnij, że kwadrat liczby całkowitej nie może dawać reszty 2 z dzielenia przez 3.
2. Dane są liczby rzeczywiste x, y, z takie, że $0 \leq x, y, z \leq 1$. Pokaż, że
$$xyz + (1 - x)(1 - y)(1 - z) \leq 1$$
3. Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie n takie, że w zapisie dziesiętnym liczby n^2 występują jedynie cyfry nieparzyste.

LICEUM

1. Wyznacz wszystkie liczby całkowite dodatnie n dla których liczba $2^n + 273$ jest kwadratem liczby całkowitej.
2. Rozwiąż w liczbach rzeczywistych układ równań
$$\begin{cases} (b + c + d)^{2018} = 3a \\ (a + c + d)^{2018} = 3b \\ (a + b + d)^{2018} = 3c \\ (a + b + c)^{2018} = 3d \end{cases}$$
3. Okrąg ω wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F . Udowodnij, że środki okręgów wpisanych w trójkąty AFE, BFD i CDE leżą na okręgu ω .