Zestaw 7

GIMNAZJUM

1. Na bokach BC i CD kwadratu $ABCD$ wybrano odpowiednio takie punkty P i Q, że $BP + DQ = PQ$. Odcinki AP i AQ przecinają przekątną BD kwadratu $ABCD$ w punktach odpowiednio M i N. Wykazać, że $MN^2 = BM^2 + DN^2$.

2. Dodatnie liczby rzeczywiste a, b mają tę własność, że liczba $\frac{a-b}{a+b}$ jest wymierna. Udowodnij, że również liczba $\frac{2a-b}{2a+b}$ jest wymierna.

3. Liczby $a+b$, $b+c$, $c+d$, $d+e$ oraz $e+a$ są wymierne. Czy możemy stąd wnioskować, że liczby a, b, c, d, e są wymierne?

LICEUM

1. Punkty P i Q leżą odpowiednio na bokach BC i CD kwadratu $ABCD$, przy czym $\sphericalangle PAQ = 45°$. Punkt E jest rzutem prostokątnym punktu A na odcinek $P\,Q$, a odcinki AP i AQ przecinają przekątną BD kwadratu $ABCD$ w punktach odpowiednio M i N. Wykazać, że proste PN, QM i AE przecinają się w jednym punkcie.

2. Dane są różne dodatnie liczby wymierne x i y , dla których liczba

$$w = \frac{x + \sqrt{y}}{y + \sqrt{x}}$$

jest wymierna. Wykaż, że obie liczby x i y są kwadratami liczb wymiernych.

3. Liczby p, q, r są takimi liczbami wymiernymi, że $pq + qr + rp = 1$. Wykaż, że $\sqrt{(1+p^2)(1+q^2)(1+r^2)}$ jest liczbą wymierną.

Uwaga zmiana! Rozwiązania można przesyłać do soboty.

Rozwiązania należy oddać do piątku 10 listopada do godziny 15.00 koordynatorowi konkursu panu Jarosławowi Szczepaniakowi lub przesłać na adres jareksz@interia.pl do soboty 11 listopada do północy.