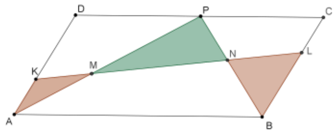
Zestaw 10

GIMNAZJUM

1. Punkty K i L leżą na bokach AD i BC równoległoboku $ABCD$, przy czym $AK = LC$. Punkt P leży na boku CD. Pokazać, że jeśli prosta KL przecina proste AP i BP odpowiednio w punktach M i N, to pole trójkąta PMN jest równe sumie pól trójkątów AKM i BLN.



2. Budowane pomieszczenie w kształcie prostopadłościanu ma mieć wysokość 3 m, podłoga zaś ma mieć wymiary 3m × 7,5 m. W pomieszczeniu nie będzie okien, jedynie drzwi na jednej kwadratowej ścianie. Prąd do pomieszczenia ma być doprowadzony nad drzwiami, 25 cm pod sufitem, w odległości 1,5 m od obu sąsiednich ścian. Jedyne gniazdko ma natomiast być umieszczone na przeciwległej ścianie, też w odległości 1,5 m od obu sąsiednich ścian, ale 25 cm nad podłogą. Jak, chcąc zużyć jak najmniej kabla, poprowadzić go od puszki z prądem do kontaktu? Oczywiście kładziemy kabel przed otynkowaniem i położeniem podłogi, a poprowadzenie go bezpośrednio od puszki do gniazdka, po linii prostej przez środek pokoju, jest wykluczone.

3. W turnieju tenisa stołowego wzięło udział 50 zawodników. Każdy zawodnik rozegrał jeden mecz z każdym innym zawodnikiem, nie było remisów. Czy możliwe jest, aby każdy z uczestników wygrał tę samą liczbę meczów? Odpowiedź uzasadnij.

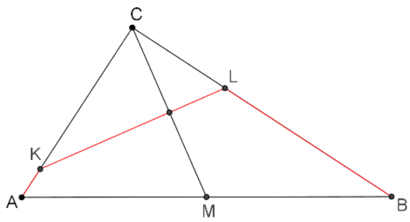
LICEUM

1. Na każdym polu szachownicy 2012 × 2012 mieszka krasnoludek, przy czym żaden z krasnoludków nigdy nie opuszcza pola, na którym mieszka. Okazało się, że 2016 krasnoludków cierpi na nieuleczalną, zaraźliwą chorobę – matemafilię, w tym 16 krasnoludków mieszkających na kwadracie 4 × 4 na samym środku szachownicy. Zdrowy krasnoludek zarazi się matemafilią, jeśli co najmniej dwóch jego sąsiadów jest na nią chorych (sąsiadami są krasnoludki, które zajmują pola o sąsiednim boku). Zarażenie matemafilią następuje zawsze o północy, przy czym zarażony krasnoludek może zarazić innego dopiero po 12 godzinach. Czy jest możliwe, że wszystkie krasnoludki będą chore na matemafilię? Jeśli tak, to po ilu – najpóźniej – dniach się to stanie?

2. Znajdź wszystkie trójki liczb całkowitych nieujemnych a, b, c spełniające układ równań:

$$\begin{cases} a + bc = 3b \\ b + ca = 3c \\ c + ab = 3a \end{cases}$$

3. Punkt M jest środkiem przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC. Symetralna odcinka CM przecina proste AC i BC odpowiednio w punktach K i L. Wykaż, że $AK^2 + BL^2 = KL^2$



Rozwiązania należy oddać do piątku 10 kwietnia do godziny 12.30 koordynatorowi konkursu panu Jarosławowi Szczepaniakowi lub swojemu nauczycielowi matematyki.

Projekt realizowany pod patronatem Dziekana Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.