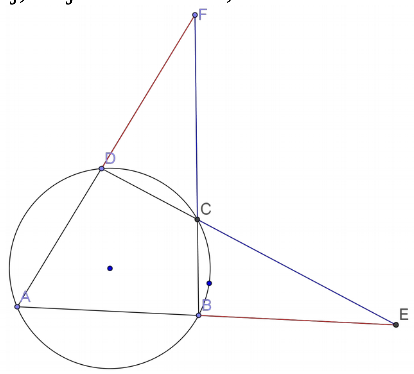
Zestaw 6.

GIMNAZJUM

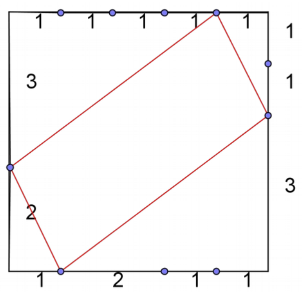
1. Udowodnij, że jeżeli pewną liczbę można przedstawić jaką różnicę kwadratów dwóch liczb naturalnych to również jej trzykrotność można przedstawić jako różnicę kwadratów dwóch liczb naturalnych.
2. Dany jest trójkąt prostokątny, w którym kąt przy wierzchołku C jest prosty oraz $|AC| \neq |BC|$. Punkty P i Q są takie, że czworokąt $APBQ$ jest kwadratem. Udowodnij, że proste CP i CQ są prostopadłe.
3. Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają równości
$(a + b)(c + d) = (a + c)(b + d) = (a + d)(b + c)$
Udowodnij, że co najmniej trzy z liczb a, b, c, d są równe.

LICEUM

1. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Proste AB i CD przecinają się w punkcie E, a proste AD i BC przecinają się w punkcie F. Udowodnij, że jeśli $BE = DF$, to $CE = CF$.



2. Na brzegu kwadratu o boku n ($n \geq 2$ jest liczbą naturalną) wyróżniono $2n$ punktów różnych od wierzchołków, które dzielą każdy z boków na odcinki o całkowitych długościach. Udowodnij, że pewne cztery wyróżnione punkty są wierzchołkami równoległoboku, którego środek pokrywa się ze środkiem kwadratu.



3. Dane są dwa okręgi współśrodkowe – mniejszy o promieniu r i większy o promieniu R. Przez wybrany punkt mniejszego okręgu poprowadzono parę prostych prostopadłych. Oblicz sumę kwadratów długości odcinków wyciętych z tych prostych przez większy okrąg.

Rozwiązania należy oddać do piątku 6 marca do godziny 12.30 koordynatorowi konkursu panu Jarosławowi Szczepaniakowi lub swojemu nauczycielowi matematyki.

Na stronie internetowej szkoły w zakładce „Konkursy i olimpiady" można znaleźć wyniki dotychczasowych rund i rozwiązania zadań.

Projekt realizowany pod patronatem Dziekana Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.