



Zestaw 28

GIMNAZJUM

1. Udowodnij (bez użycia kalkulatora lub komputera), że

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$$

2. W ziemię wbito – w pewnej odległości od siebie – dwa pale: jeden o wysokości 4 m 30 cm, a drugi 2 m 60 cm. Następnie powieszono dwa naprężone sznurki: z wierzchołka pierwszego pala do podstawy drugiego oraz z wierzchołka drugiego pala do podstawy pierwszego. Na jakiej wysokości nad ziemią sznurki się przetną?

3. Kostka $3 \times 3 \times 3$ składa się z 27 małych sześcianów. Żuczek matematyczny może przejść z jednego małego sześcianu do drugiego wyłącznie przez sąsiadującą ścianę. Znajdź te wszystkie małe sześciany, z których może wystartować żuczek, jeśli chce w swojej podróży odwiedzić wszystkie małe sześciany – każdy dokładnie raz.

LICEUM

1. Znajdź wszystkie takie pola na szachownicy 8×8 , że szachownicę bez tego pola można pokryć kamieniami 3×1 .

2. Udowodnij, że 28 jest największą liczbą parzystą, której nie da się rozłożyć na sumę dwóch liczb nieparzystych złożonych.

3. Niech M i N będą odpowiednio środkami przekątnych AC i BD czworokąta ABCD. Wykaż, że $[ABM] + [CDM] = [ABN] + [CDN]$, gdzie $[XYZ]$ oznacza pole trójkąta XYZ.