

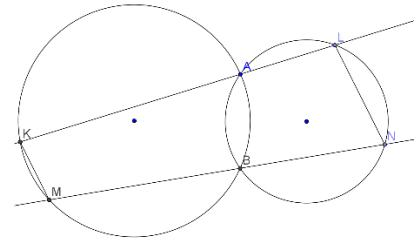


Zestaw 29

GIMNAZJUM

1. Udowodnij, że jeżeli $x^2 + \frac{1}{x^2}$ jest liczbą całkowitą, to również $x^4 + \frac{1}{x^4}$ jest liczbą całkowitą.

2. Dane są dwa okręgi, przecinające się w punktach A i B . Przez punkt A poprowadzono sieczną obu okręgów, przecinającą pierwszy z nich w punktach A i K , zaś drugi w punktach A i L . Analogicznie przez punkt B poprowadzono sieczną przecinającą oba okręgi odpowiednio w punktach M i B oraz N i B . Udowodnij, że odcinki KM i LN są równoległe.



3. Danych jest 111 dodatnich liczb całkowitych. Wykaż, że spośród nich można wybrać 11 takich liczb, których suma jest podzielna przez 11.

LICEUM

1. Miara każdego kąta sześciokąta $ABCDEF$ jest równa 120° . Udowodnij, że symetralne odcinków AB , CD i EF przecinają się w jednym punkcie.

2. Uzasadnij, że dla dowolnego m całkowitego ułamek $\frac{14m+3}{21m+4}$ jest nieskracalny.

3. Wykaż, że obraz ortocentrum trójkąta w symetrii osiowej względem prostej zawierającej dowolny bok trójkąta należy do okręgu opisanego na tym trójkącie.