



Zestaw 32

GIMNAZJUM

1. Liczba x jest dodatnia. Jaką najmniejszą wartość może przyjąć wyrażenie $x^2 + \frac{1}{x}$.

2. Wykaż, że dla każdego $x \neq 0$ zachodzi nierówność

$$x^{10} + \frac{1}{x^{10}} + (x^2 + x^4 + x^6 + x^8)\left(1 + \frac{1}{x^{10}}\right) \geq 10$$

3. W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczną kąta A . Wyznaczyć kąty trójkąta ABC , jeśli środek okręgu wpisanego w trójkąt ABD jest jednocześnie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC .

LICEUM

1. Udowodnij nierówność $\frac{x^2+y^2+z^2+3}{2} \geq x + y + z$

2. Wyznacz wszystkie liczby naturalne, które są 11 razy większe od sumy swych cyfr.

3. Niech d_1, d_2, d_3, d_4 będą odległościami punktu wewnętrznego czworokąta wypukłego od jego wierzchołków. Wykaż, że

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \geq 2\sqrt{2S}$$

gdzie S oznacza pole czworokąta.