



Zestaw 17

KLASY PO SZKOLE PODSTAWOWEJ

1. Turysta przeszedł drogę z miasta A do miasta B i z powrotem w ciągu 3 godzin i 41 minut. Droga z A do B wiodła początkowo pod górę, potem po równym terenie, a następnie z góry. Prędkość turysty pod górę wynosi 4 km/h, po równym terenie 5 km/h, a z góry 6 km/h. Odległość z A do B wynosi 9 km. Na jakiej długości droga z miasta A do B wiedzie po równym terenie?
2. Ciąg Fibonacciego określony jest następująco:

$$F(1) = F(2) = 1$$
$$F(n+2) = F(n+1) + F(n) \text{ dla } n \text{ całkowitych dodatnich}$$

Ustal, czy liczba $F(2021)$ jest parzysta. Odpowiedź uzasadnij.

3. Rozstrzygnij, czy szachownicę 8x8 z której usunięto pola A1 i H8 można pokryć kostkami domina, z których każde pokrywa dwa pola szachownicy i kostki na siebie nie zachodzą.

KLASY PO GIMNAZJUM

1. Rozważmy wszystkie trójkąty o ustalonej podstawie AB, których wierzchołek C należy do pewnej prostej k równoległej do prostej AB i się z nią nie pokrywającej. Udowodnij, że ortocentra wszystkich tych trójkątów tworzą parabolę.
2. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n prawdziwa jest równość:

$$n^2 + (n^2 + 1) + (n^2 + 2) \dots + (n^2 + n) = (n^2 + n + 1) + (n^2 + n + 2) + \dots + (n^2 + n + n)$$

czyli na przykład:

$$1 + 2 = 3$$

$$4 + 5 + 6 = 7 + 8$$

$$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15 \text{ itd.}$$

3. W kasynie toczy się gra w ruletkę. Gdy Piotr opuścił grę z żetonami wartymi 16000 zł, średni majątek przy tym stole zmalał od 1000 zł. Gdy jakiś czas później do stołu dołączyły Ala i Ola, każda z majątkiem wartym 2000 zł, ponownie przeciętny wynik przy stole spadł o 1000 zł. Ilu graczy siedziało przy stole, zanim Piotr opuścił grę?