



Zestaw 4

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Ciąg Fibonacciego określony jest następująco:

$$F_1 = F_2 = 1$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ dla } n \text{ całkowitych dodatnich}$$

Ustal, czy liczba F_{2021} jest parzysta.

2. Na każdym polu szachownicy 2021×2021 mieszka krasnoludek, przy czym żaden z krasnoludków nigdy nie opuszcza pola, na którym mieszka. Okazało się, że 2026 krasnoludków cierpi na nieuleczalną, zaraźliwą chorobę – matemafilię, w tym 9 krasnoludków mieszkających na kwadracie 3×3 na samym środku szachownicy. Zdrowy krasnoludek zarazi się matemafilią, jeśli co najmniej dwóch jego sąsiadów jest na nią chorych (sąsiadami są krasnoludki, które zajmują pola o sąsiednim boku). Zараżenie matemafilią następuje zawsze o północy, przy czym zarażony krasnoludek może zarazić innego dopiero po 12 godzinach. Czy jest możliwe, że wszystkie krasnoludki będą chore na matemafilię? Jeśli tak, to po ilu – najpóźniej – dniach się to stanie?

3. Turysta idący na stację kolejową przeszedł w ciągu godziny 3,5 km i zorientował się, że idąc nadal z tą samą prędkością, spóźni się na pociąg o godzinę. Przyspieszył więc i pozostałą część trasy przeszedł z prędkością 5 km/h, docierając na stację pół godziny przed planowanym odjazdem pociągu. Jaką długą trasę przebył ten turysta?

KLASY TRZECIE

1. Wyznacz wszystkie pary (a, b) dodatnich liczb całkowitych, które spełniają równanie

$$ab = (a - b)^3$$

2. Rozwiąż w dodatnich liczbach całkowitych nieparzystych równanie

$$a^2 - b^3 = 4$$

3. Dany jest czworokąt wypukły ABCD. Punkty K i L są odpowiednio środkami boków AB i CD. Wykaż, że jeżeli pola czworokątów BCLK i DAKL są równe, to czworokąt ABCD jest trapezem.