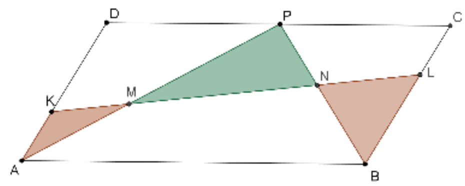
Zestaw 6

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Na każdym polu szachownicy 11 × 11 siedzi konik polny. W pewnym momencie koniki przeskakują ze swojego pola na pole sąsiednie (tzn. pole o wspólnym boku). Rozstrzygnij, czy jest możliwe, aby po tym ruchu wszystkie pola nadal były zajęte. Odpowiedź uzasadnij.

2. W turnieju tenisa stołowego wzięło udział 50 zawodników. Każdy zawodnik rozegrał jeden mecz z każdym innym zawodnikiem, nie było remisów. Czy możliwe jest, aby każdy z uczestników wygrał tę samą liczbę meczów? Odpowiedź uzasadnij.

3. Punkty K i L leżą na bokach AD i BC równoległoboku $ABCD$, przy czym $AK = LC$. Punkt P leży na boku CD. Pokazać, że jeśli prosta KL przecina proste AP i BP odpowiednio w punktach M i N, to pole trójkąta PMN jest równe sumie pól trójkątów AKM i BLN.



KLASY TRZECIE

1. Dane są punkty A, B, C, D leżące w tej kolejności na okręgu. Niech S będzie środkiem łuku AB, U środkiem łuku BC, T środkiem łuku CD i V środkiem łuku DA tego okręgu. Udowodnij, że odcinki ST i UV są prostopadłe.

2. Czworokąt wypukły podzielono przekątnymi na cztery trójkąty. Pola S_1, S_2, S_3, S_4 tych trójkątów są liczbami całkowitymi. Udowodnij, że liczba $S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ jest złożona.

3. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele par liczb naturalnych (a, b), dla których liczba $4^a + 4^b + 4^{a+b}$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązania należy oddać do piątku 29 października do godziny 16.00 koordynatorowi konkursu panu Jarosławowi Szczepaniakowi lub przesłać na adres jareksz@interia.pl do soboty 30 października do północy.