Zestaw 8

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. W trójkącie ostrokątnym ABC dane są wysokości AD i BE. Udowodnij, że trójkąt CDE jest podobny do trójkąta ABC.

2. W trójkąt prostokątny ABC wpisano okrąg. Rzut tego okręgu na przeciwprostokątną AB jest odcinkiem MN. Wyznacz kąt MCN.

3. Czworokąt wypukły ABCD jest wpisany w okrąg. Półproste AD i BC przecinają się w punkcie P. Wykazać, że $\sphericalangle APB = \sphericalangle ADB - \sphericalangle CAD$

KLASY TRZECIE

1. Punkt D leży na boku AB trójkąta ABC. Okręgi styczne do prostych AC i BC odpowiednio w punktach A i B przechodzą przez punkt D i przecinają się po raz drugi w punkcie E. Punkt F jest odbiciem symetrycznym wierzchołka C względem symetralnej boku AB. Wykaż, ze punkty D, E i F są współliniowe.

2. Dany jest trójkąt równoboczny ABC. Na półprostej CA wybrano punkty A_1, A_2 zaś na półprostej CB wybrano punkty B_1, B_2. Na zewnątrz kąta ACB wybrano punkty C_1, C_2 w ten sposób, że trójkąty $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2\,C_2$ są równoboczne. Wykaż, że punkty C, C_1, C_2 leżą na jednej prostej.

3. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele parami różnych liczb całkowitych a, b, c i d, że liczby

$$a^2 + 2cd + b^2 \text{ oraz } c^2 + 2ab + d^2$$

są kwadratami.

Rozwiązania należy oddać do środy 10 listopada do godziny 16.00 koordynatorowi konkursu panu Jarosławowi Szczepaniakowi lub przesłać na adres jareksz@interia.pl do soboty 13 listopada do północy.