MISTRZOWIE MATEMATYKI

Zestaw 15

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Udowodnij, ze dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność
$\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \geq \sqrt{2a} + \sqrt{2b} + \sqrt{2c}$

2. Dany jest prostopadłościan ABCDEFGH o podstawie ABCD i krawędziach bocznych AE, BF, CG, DH. Punkt S jest środkiem krawędzi EH. Udowodnij, że z odcinków o długościach $AG, CH, 2 \cdot AS$ można zbudować trójkąt.

3. W ośmiokącie wszystkie przekątne mają długość 1 i przecinają się w jednym punkcie. Udowodnij, że obwód tego ośmiokąta jest mniejszy niż 8.

KLASY TRZECIE

1. Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości odpowiednio a i b. Na pierwszej z tych przyprostokątnych wybrano punkt P, a na drugiej punkt Q. Niech K i H będą rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów P i Q na przeciwprostokątną. Jaka jest najmniejsza możliwa wartość sumy $|KP| + |PQ| + |QH|$? Odpowiedź uzasadnij.

2. Mamy 17 liczb rzeczywistych. Wiadomo, że suma dowolnych dziewięciu spośród tych liczb jest większa od sumy pozostałych ośmiu. Wykaż, że wszystkie te liczby są dodatnie.

3. Wyznacz wszystkie liczby całkowite nieujemne n, dla których liczba $7^n + 2 \cdot 4^n$ jest liczbą pierwszą.

Rozwiązania należy przesłać na adres jareksz@interia.pl do soboty 8 stycznia do północy.