Zestaw 23

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Uzasadnij, że dowolnej liczby naturalnej n:

$$1+4+7+\dots+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}$$

2. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n liczba $4^n+15n-1$ jest podzielna przez 9.

3. Uzasadnij, że dowolnej liczby naturalnej n:

$$(n+1)(n+2)(n+3)\cdot\ldots\cdot 2n=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$$

KLASY TRZECIE

Inwersją o środku O i promieniu r nazywamy takie przekształcenie płaszczyzny (bez punktu O), które każdemu punktowi $A\neq O$ przyporządkowuje taki punkt A’, że A’ leży na półprostej OA i $OA\cdot OA’=r^2$.

1. Sieczne BC i DE okręgu o środku O przecinają się w punkcie A leżącym na zewnątrz okręgu i są symetryczne względem prostej OA. Punkt F jest punktem przecięcia odcinków BE i CD (i, ze względu na symetrię, odcinka OA). Udowodnij, że F jest obrazem A (i A jest obrazem F) w inwersji względem rozważanego okręgu.

2. Z punktu A poprowadzono styczne do okręgu ω. Wykaż, że środek cięciwy o końcach w punktach styczności jest obrazem inwersyjnym punktu A w inwersji względem okręgu ω.

3. Okrąg o środku A i promieniu AO przecina okrąg ω o środku O, w punktach B i C, okrąg o środku B i promieniu BO przecina odcinek AO w punkcie A’. Udowodnij, że A’ jest obrazem punktu A w inwersji względem ω.

Rozwiązania należy oddać p. Jarosławowi Szczepaniakowi do piątku 18 marca do godziny 15.00 lub przesłać na adres jareksz@interia.pl do soboty 19 marca do północy.