



## Zestaw 5

---

### KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Na przedłużeniu przeciwprostokątnej  $AB$  trójkąta prostokątnego  $ABC$  odłożono takie odcinki  $AD$  i  $BE$ , że  $AD = AC$  i  $BE = BC$ . Wyznacz miarę kąta  $DCE$ .
2. Rozwiąż w liczbach całkowitych równanie
$$x \cdot y \cdot (x + 2023y) = 2023^{2022}$$
3. Punkt  $P$  jest dowolnym punktem wewnętrznym trójkąta równobocznego  $ABC$ . Odległości punktu  $P$  od boków  $BC, CA, AB$  są równe odpowiednio  $x, y, z$ . Wykaż, że dla danego trójkąta równobocznego  $x + y + z$  jest wielkością stałą.

### KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Punkt  $P$  leży na okręgu opisanym na trójkącie równobocznym  $ABC$ . Udowodnij, że jeden z odcinków  $AP, BP, CP$  ma długość równą sumie długości dwóch pozostałych.
2. Udowodnij, że jeżeli liczby  $a, b, c$  są dodatnie oraz  $ab + bc + ca = 1$ , to
$$a + b + c \geq \sqrt{3}$$
3. Rozwiąż równanie

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^{\cos 2x} \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^{\sin 2x} = 1$$