



## Zestaw 6

---

### KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Wiedząc, że  $x + \frac{1}{x} = 7$  oblicz wartość wyrażenia  $x^3 + \frac{1}{x^3}$
2. Udowodnij, że jeśli pewną liczbę można przedstawić jako sumę kwadratów dwóch liczb naturalnych, to również trzynastokrotność tej liczby można przestawić w postaci sumy kwadratów dwóch liczb naturalnych.
3. Punkt  $S$  leży wewnątrz sześciokąta foremnego  $ABCDEF$ . Udowodnić, że suma pól trójkątów  $ABS$ ,  $CDS$ ,  $EFS$  jest równa połowie pola sześciokąta  $ABCDEF$ .

### KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Udowodnij, że zbiór  $S = \{6n + 3 : n \in N\}$ , gdzie  $N$  jest zbiorem wszystkich liczb naturalnych, zawiera nieskończenie wiele kwadratów liczb całkowitych.
2. Sfera  $S_1$  jest wpisana w sześcian, sfera  $S_2$  jest styczna do wszystkich krawędzi tego sześcianu, a sfera  $S_3$  jest opisana na tym sześcianie. Sprawdź, czy pola tych sfer tworzą ciąg geometryczny lub arytmetyczny.
2. Wykaż, że niezależnie od wartości parametru  $m$  równanie
$$x^3 - (m + 1)x^2 + (m + 3)x - 3 = 0$$
ma pierwiastek całkowity. Dla jakich  $m$  wszystkie pierwiastki rzeczywiste tego równania są całkowite?