



## Zestaw 9

---

### KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Rozwiąż w liczbach całkowitych równanie:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$$

2. Rozwiąż w liczbach całkowitych równanie:

$$2^x(6 - x) = 8x$$

3. W czworokącie  $ABCD$  punkt  $E$  jest punktem przecięcia przekątnych. Udowodnij, że jeżeli pola trójkątów  $AED$  i  $BEC$  są równe, to czworokąt  $ABCD$  jest trapezem.

### KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Sześciokąt  $ABCDEF$  jest wypukły oraz  $AB = BC, CD = DE, EF = FA$ . Wykaż, że proste zawierające wysokości trójkątów  $BCD, DEF, FAB$ , poprowadzone odpowiednio z wierzchołków  $C, E, A$ , przecinają się w jednym punkcie.

2. Niech  $a$  i  $b$  będą dwiema liczbami rzeczywistymi, przy czym  $a > b$ . Udowodnij, że

$$a^3 - b^3 \geq ab^2 - a^2b$$

3. Odcinek  $CT$  jest wysokością trójkąta  $ABC$ , w którym kąt  $ACB$  jest prosty. Okrąg o środku  $C$  i promieniu  $CT$  oraz okrąg opisany na trójkącie  $ABC$  przecinają się w punktach  $P$  i  $Q$ . Dowieść, że prosta  $PQ$  przechodzi przez środek odcinka  $CT$ .