Zestaw 32

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Punkty K i L leżą na bokach AD i BC równoległoboku $ABCD$, przy czym $AK = LC$. Punkt P leży na boku CD. Pokazać, że jeśli prosta KL przecina proste AP i BP odpowiednio w punktach M i N, to pole trójkąta PMN jest równe sumie pól trójkątów AKM i BLN.

2. Czworokąt wypukły $ABCD$ ma pole równe 1. Punkt K jest symetryczny do punktu B względem punktu A, punkt L jest symetryczny do punktu C względem punktu B, punkt M jest symetryczny do punktu D względem punktu C, punkt N jest symetryczny do punktu A względem punktu D. Oblicz pole czworokąta $KLMN$.

3. Dany jest równoległobok ABCD. Punkt E należy do boku AB, a punkt F do boku AD. Prosta EF przecina prostą CB w punkcie P, a prostą CD w punkcie Q. Wykaż, że pole trójkąta CEF jest równe polu trójkąta APQ.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Przy każdym wierzchołku 55-kąta foremnego napisano liczbę całkowitą. Żadna z tych liczb nie jest podzielna przez 5. Wykaż, że istnieją takie dwie liczby a i b, napisane przy sąsiednich wierzchołkach tego wielokąta, że liczba $a^2 - b^2$ jest podzielna przez 5.

2. Czworościan foremny o krawędzi 1 przecięto płaszczyzną tak, że w przekroju otrzymano czworokąt. Jaki jest najmniejszy możliwy obwód tego czworokąta? Odpowiedź uzasadnij.

3. Na przyjęciu spotkało się sześć osób. Okazało się, że każda z nich ma wśród pozostałych dokładnie trzech znajomych. Wykaż, że pewne cztery z tych osób mogą usiąść przy okrągłym stole w taki sposób, aby każda z nich siedziała pomiędzy swoimi dwoma znajomymi.

Rozwiązania należy oddać do piątku 19 maja do godziny 15.10 koordynatorowi konkursu panu Jarosławowi Szczepaniakowi lub przesłać na adres jareksz@interia.pl do północy w piątek 19 maja.