



## Zestaw 35

---

### KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Punkt  $M$  jest środkiem przeciwprostokątnej  $AB$  trójkąta prostokątnego  $ABC$ . Symetralna odcinka  $CM$  przecina proste  $AC$  i  $BC$  odpowiednio w punktach  $K$  i  $L$ . Wykaż, że  $AK^2 + BL^2 = KL^2$
2. W czworokącie wypukłym  $ABCD$  przekątne  $AC$  i  $BD$  są równej długości. Punkty  $M$  i  $N$  są odpowiednio środkami boków  $AD$  i  $BC$ . Wykaż, że prosta  $MN$  tworzy równe kąty z przekątnymi  $AC$  i  $BD$ .
3. Dane są liczby 1, 2, 3, 4, 5, 6. Wykonujemy operację polegającą na dodaniu do dwóch spośród nich liczby 1. Na tak utworzonym ciągu liczb powtarzamy wielokrotnie tę operację. Czy w pewnym momencie możemy uzyskać ciąg stały, tj. mający wszystkie wyrazy równe?

### KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. W okrąg wpisano trapez równoramienny o dłuższej podstawie będącej średnicą okręgu oraz trójkąt, którego boki są równoległe do boków trapezu. Wykaż, że trapez i trójkąt mają równe pola.
2. Wykaż, że trójka  $(0, 0, 0)$  jest jedynym rozwiązaniem w liczbach całkowitych równania
$$x^3 = 2y^3 + 4z^3$$
3. Niech  $n$  będzie liczbą naturalną. Wykaż, że suma  $1 + 2^n + 3^n + 4^n$  jest podzielna przez 5 wtedy i tylko wtedy, gdy  $n$  nie jest podzielne przez 4.