Zestaw 3

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

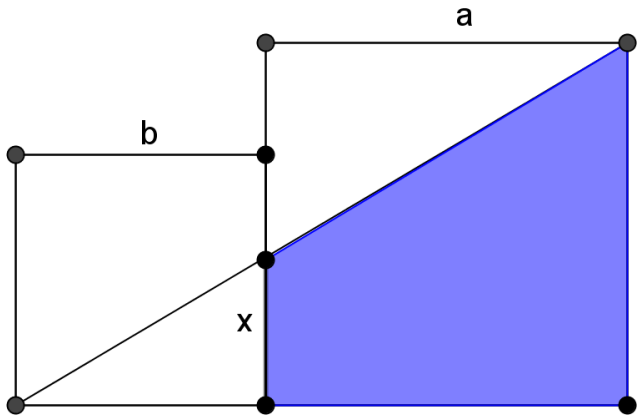
1. Rozwiąż w liczbach całkowitych równanie

$$x \cdot y \cdot (x + 2023y) = 2023^{2023}$$

Dane równanie nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych. Prawa strona jest nieparzysta. Pokażemy, że lewa jest parzysta, niezależnie od tego, jakie liczby całkowite podstawimy za x i y. Jeśli któraś z nich jest parzysta, to oczywiście cały iloczyn $x \cdot y \cdot (x + 2023y)$ jest parzysty. Jeśli obie są nieparzyste, to również nieparzysta jest liczba $2023y$, a tym samym suma $x + 2023y$ jest parzysta.

Ponieważ nie może być równości między liczbą parzystą a liczbą nieparzystą, nasze równanie nie ma rozwiązań.

2. Dane są dwa kwadraty, jeden przy drugim, o bokach a i b. Wyznacz stosunek pól: zamalowanej części dużego kwadratu i tegoż kwadratu.



Zamalowana figura jest trapezem o podstawach a i x oraz o wysokości a.
Policzymy najpierw długość x. Z twierdzenia Talesa:

$$\frac{a}{x} = \frac{a+b}{b}$$

$$x = \frac{ab}{a+b}$$

Liczymy pole trapezu:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \left(a + \frac{ab}{a+b}\right) \cdot a = \frac{a+2b}{2a+2b} \cdot a^2$$

Stosunek zamalowanej części dużego kwadratu do tegoż kwadratu wynosi więc $\frac{a+2b}{2a+2b}$

3. Wiadomo, że $x + \frac{1}{x} = 12$. Ile wynosi $x^2 + \frac{1}{x^2}$?

Podnieśmy obie strony równości $x + \frac{1}{x} = 12$ do kwadratu. Dostaniemy kolejno:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 144$$
$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 144$$
$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 142$$

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Współczynniki a, b, c, d wielomianu $W(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ są liczbami całkowitymi nieparzystymi. Udowodnić, że wielomian ten nie posiada pierwiastków całkowitych.

Załóżmy, że liczba całkowita x_0 jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$. Niezależnie od parzystości liczby x_0 liczba ${x_0}^4 + a{x_0}^3 + b{x_0}^2 + cx_0 + d$ jest nieparzysta (sprawdź to), nie może więc się równać 0, które jest parzyste.

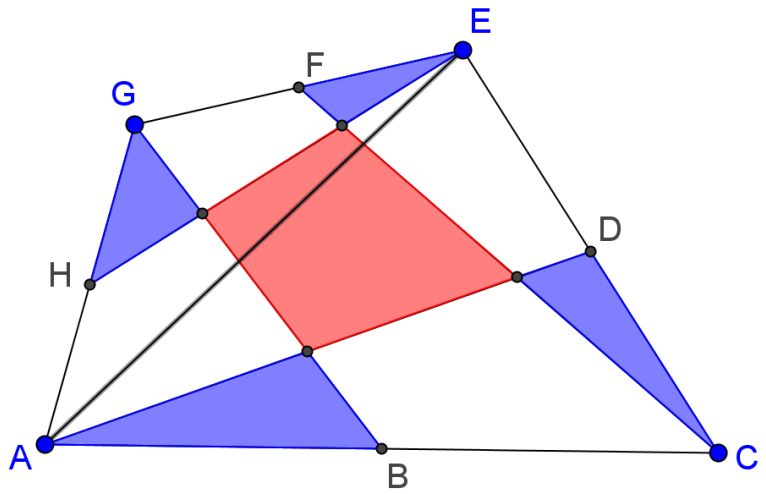
2. Wykaż, że liczba $3^{54} - 3^{27} \cdot 2^{12} + 2^{24}$ jest złożona.

Oznaczmy $3^{27} = a$, $2^{12} = b$. Nasza liczba równa się wtedy $a^2 - ab + b^2$. Poprzekształcajmy:

$$a^2 - ab + b^2 = (a+b)^2 - 3ab = (3^{27} + 2^{12})^2 - 3^{28}2^{12}$$
$$= (3^{27} + 2^{12} - 3^{14}2^6)(3^{27} + 2^{12} + 3^{14}2^6)$$

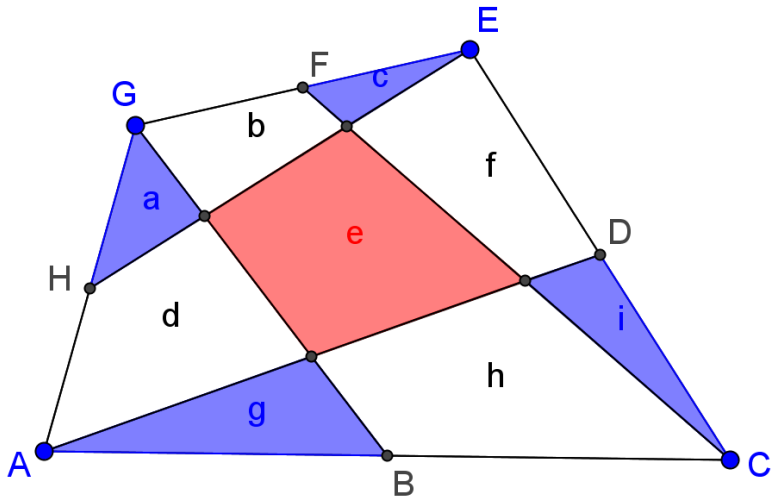
To, że liczba $3^{27} + 2^{12} - 3^{14}2^6$ jest większa od 1 wynika z faktu, że $3^{14}2^6$ jest mniejsze od 3^{27}.

3. W czworokącie wypukłym środki boków połączono z wierzchołkami tak, jak na rysunku. Udowodnij, że pole czerwonego czworokąta jest równe sumie pól niebieskich trójkątów.



Oznaczmy punkty jak na rysunku. Poprowadźmy odcinek AE. Trójkąty HAE i GHE mają jednakowe pola (dlaczego?). Również jednakowe pola mają trójkąty CDA i DEA. Oznacza to, że pole czworokąta $ADEH$ stanowi połowę pola czworokąta $ACEG$. Podobnie wykażemy, że pole czworokąta $BCFG$ stanowi połowę pola czworokąta $ACEG$.

Oznaczmy pola obszarów, na które podzieliliśmy czworokąt $ACEG$, jak na rysunku poniżej.



Dostajemy równości

$$a + b + c + g + h + i = d + e + f$$
$$a + d + g + c + f + i = b + e + h$$

Po dodaniu stronami i redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy:

$$a + c + g + i = e$$