Zestaw 5

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Uzasadnij, że liczba $\frac{6+6^2+6^3+\cdots+6^{2024}}{7}$ jest liczbą całkowitą.

Pogrupujmy składniki licznika po dwa i z każdej dwójki wyłączmy przed nawias odpowiednią potęgę liczby 6:

$$\frac{6+6^2+6^3+\cdots+6^{2024}}{7}=\frac{(6+6^2)+(6^3+6^4)+\cdots+(6^{2023}+6^{2024})}{7}$$
$$=\frac{6(1+6)+6^3(1+6)+\cdots+6^{2023}(1+6)}{7}=\frac{6\cdot 7+6^3\cdot 7+\cdots+6^{2023}\cdot 7}{7}$$
$$=6+6^3+\cdots+6^{2023}$$

2. Rozstrzygnij, czy istnieją nieujemne liczby całkowite a, b, n, dla których

$$a^2-b^2=\ 2\cdot 3^n$$

Nie istnieją.

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

Liczby $(a-b)$ oraz $(a+b)$ są tej samej parzystości. Jeśli obie są nieparzyste, to ich iloczyn jest nieparzysty, a tymczasem $2\cdot 3^n$ jest parzyste. Jeżeli obie są parzyste, to ich iloczyn jest podzielny przez 4, a liczba $2\cdot 3^n$ podzielna przez 4 nie jest.

Uwaga! Nie zawszę napiszę w treści zadania, że odpowiedź należy uzasadnić. Musicie się przyzwyczaić, że uzasadnienie to najważniejsza treść zadania i że tezy bez uzasadnienia będę traktował jako zadanie niezrobione.

3. Która liczba jest większa $3^{100}-2^{150}$ czy $3^{50}+2^{75}$? Odpowiedź uzasadnij.

Pokażemy, że większa jest liczba $3^{100}-2^{150}$.

$$3^{100}-2^{150}=(3^{50}-2^{75})(3^{50}+2^{75})=(9^{25}-8^{25})(3^{50}+2^{75})>3^{50}+2^{75}$$

bo $(9^{25}-8^{25})>1$

KLASY TRZECIE I CZWARTE

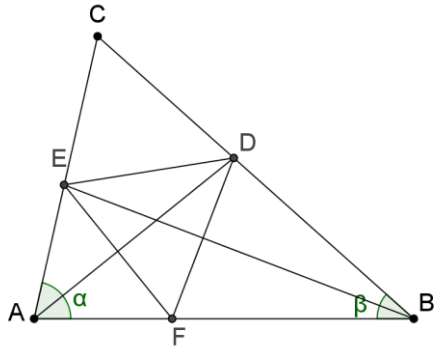
1. Wykaż, że w trójkącie o bokach a, b, c i wysokościach odpowiednio h_a, h_b, h_c zachodzi równość

$$(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=(h_a+h_b+h_c)\cdot\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)$$

Pomnóżmy obie strony naszej równości przez 2P, gdzie P oznacza pole trójkąta i skorzystajmy z faktu, że $\frac{2P}{a} = h_a$ oraz $\frac{2P}{h_a} = a$

$$(a+b+c)\cdot\left(\frac{2P}{a}+\frac{2P}{b}+\frac{2P}{c}\right) = (h_a+h_b+h_c)\cdot\left(\frac{2P}{h_a}+\frac{2P}{h_b}+\frac{2P}{h_c}\right)$$
$$(a+b+c)\cdot(h_a+h_b+h_c) = (a+b+c)\cdot(h_a+h_b+h_c)$$

2. Dwusieczne kątów BAC i ABC trójkąta ABC przecinają przeciwległe boki tego trójkąta odpowiednio w punktach D i E. Wiedząc, że $AE + BD = AB$, wyznacz miarę kąta ACB.



Niech F będzie takim punktem na odcinku AB, że $AF = AE$ i $BF = BD$. Wówczas czworokąt $AFDE$ jest deltoidem (przekątna AD dzieli przekątną EF na pół i jest do niej prostopadła). Podobnie uzasadnimy, że czworokąt $FBDE$ jest deltoidem. Dostajemy więc, że $FD = DE = EF$, trójkąt FDE jest równoboczny i kąt EFD ma 60°.
Popatrzmy na sumę kątów AFE, EFD i DFB:

$$\frac{180° - \alpha}{2} + 60° + \frac{180° - \beta}{2} = 180°$$

Z tego wynika, że $\alpha + \beta = 120°$, na kąt ACB zostaje więc 60°.

3. Cyfry rozwinięcia dziesiętnego liczb 2^{2023} i 5^{2023} wypisano kolejno jedna za drugą. Oblicz, ile zapisano cyfr.
Oznaczmy przez n ilość cyfr liczby 2^{2023}, a przez m ilość cyfr liczby 5^{2023}. Mamy więc:
$10^{n-1} < 2^{2023} < 10^n$ oraz $10^{m-1} < 5^{2023} < 10^m$
Pomnóżmy te nierówności stronami. Dostaniemy:

$$10^{n+m-2} < 10^{2023} < 10^{n+m}$$

i dalej:

$$n + m - 2 < 2023 < n + m$$

Łatwo już teraz zauważyć, że zapisano 2024 cyfry.