Zestaw 9

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

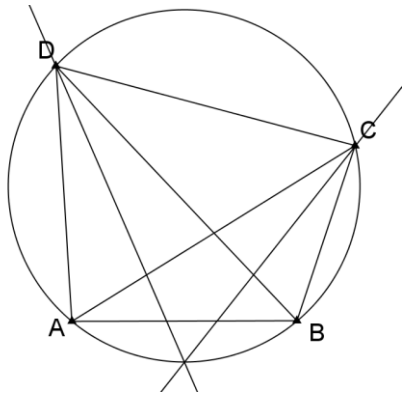
1. Rozwiąż w liczbach całkowitych równanie $2^x(6-x) = 8x$

Zauważmy, że jeżeli x jest ujemne, to lewa strona równania jest dodatnia, a prawa ujemna, jeżeli zaś x jest większe niż 6, to lewa strona jest ujemna a prawa dodatnia. Wystarczy więc sprawdzić liczby całkowite od 0 do 6. Okazuje się, że sprawdzenie wychodzi dla $x \in \{2, 3, 4\}$

2. Dwa samochody, mercedes i ford, przejechały tę samą trasę. Mercedes jechał połowę drogi z szybkością 50 km/h, a połowę drogi z szybkością 40 km/h. Ford jechał połowę czasu z szybkością 50 km/h, a połowę czasu z szybkością 40 km/h. Który z nich szybciej przejechał całą drogę. Odpowiedź uzasadnij.

Szybciej przejechał ford. Średnia szybkość mercedesa to średnia harmoniczna szybkości tam i szybkości z powrotem: $V_m = \frac{2}{\frac{1}{50}+\frac{1}{40}} = 44\frac{4}{9}$ km/h. Średnia szybkość forda to średnia arytmetyczna szybkości tam i szybkości z powrotem: $V_f = \frac{50+40}{2} = 45$ km/h.

3. Czworokąt ABCD jest wpisany w okrąg ω. Wykazać, że dwusieczne kątów ACB i ADB przecinają się w punkcie leżącym na okręgu ω.



Dwusieczna kąta ACB dzieli go na dwa kąty o równych miarach, a to oznacza, że są one oparte na jednakowych łukach, co z kolei oznacza, że ta dwusieczna przechodzi przez środek łuku AB (tego, który nie zawiera punktu C). Analogicznie uzasadnimy, że dwusieczna kąta ADB przechodzi przez ten sam środek łuku AB.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = x^2 + \frac{3}{x}$, $x > 0$.

Jest to przedział $\langle \frac{3}{2}\sqrt[3]{18}, \infty \rangle$. Aby to udowodnić, skorzystajmy z nierówności między średnią arytmetyczną a średnią geometryczną:

$$x^2 + \frac{3}{x} = x^2 + \frac{3}{2x} + \frac{3}{2x} \geq 3\sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{3}{2x} \cdot \frac{3}{2x}} = 3\sqrt[3]{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{18}$$

Równość zachodzi, gdy $x^2 = \frac{3}{2x}$, czyli dla $x = \frac{\sqrt[3]{12}}{2}$ (sprawdź).

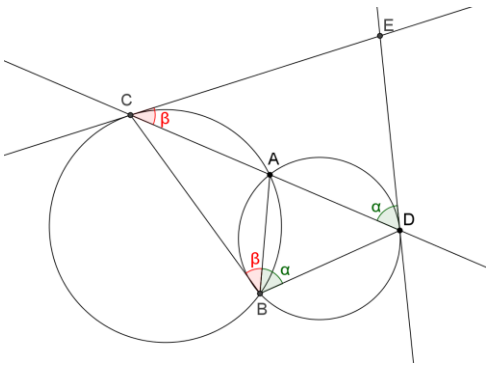
2. Pewien pojazd przebył drogę z punktu A do punktu B ze średnią szybkością 10 km/h. Z jaką szybkością powinien wracać z punktu B do punktu A, aby średnia szybkość na całej drodze tam i z powrotem wyniosła 20 km/h.

Jest to niemożliwe. Choćbyśmy nie wiem jak pędzili, nie osiągniemy średniej szybkości tam i z powrotem 20 km/h. Aby się o tym przekonać ułóżmy odpowiednie równanie, pamiętając, że średnia szybkość tam i z powrotem to średnia harmoniczna szybkości tam i szybkości z powrotem:

$$\frac{2}{\frac{1}{10} + \frac{1}{x}} = 20$$

Wynika z niego, że $x = x + 10$.

3. Dwa okręgi przecinają się w punktach A i B. Przez punkt A poprowadzono prostą, która przecina dane okręgi w punktach C i D, przy czym punkt A jest punktem wewnętrznym odcinka CD. W punktach C i D poprowadzono styczne do tych okręgów, które przecinają się w punkcie E. Wykazać, że punkty B, C, D, E leżą na jednym okręgu.



Oznaczmy kąt ABD przez α, a kąt CBA przez β. Kąt ADE też ma miarę α jako kąt dopisany oparty na tym samym łuku, co kąt wpisany ABD. Podobnie wyjaśnimy, dlaczego kąt ACE ma miarę β. Kąt CED ma więc miarę $180° - (\alpha + \beta)$, co wystarcza, by na czworokącie CBDE dało się opisać okrąg.