Zestaw 10

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p, dla których $p+4$ jest kwadratem liczby naturalnej.

Niech $p+4=k^2$. Wówczas $p=k^2-4=(k-2)(k+2)$. Ponieważ liczba p jest pierwsza, $k-2=1$ czyli $k=3$, a $p=5$.

2. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p,q,r, dla których $pqr=5(p+q+r)$.

Prawa strona jest podzielna przez 5, więc lewa strona też, ale lewa strona to iloczyn liczb pierwszych, więc jedna z nich równa się 5. Niech to będzie p. Nasza równość przybiera teraz postać:

$$5 \cdot q \cdot r = 5(5 + q + r)$$

czyli

$$q \cdot r = 5 + q + r$$

Przekształcamy naszą równość tak, aby lewa strona przybrała postać iloczynu (to bardzo ważna metoda rozwiązywania równań, warto ją znać).

$$q \cdot r - q - r + 1 = 6$$
$$q \cdot (r - 1) - (r - 1) = 6$$
$$(q - 1) \cdot (r - 1) = 6$$

Liczby $(q-1)$ i $(r-1)$ są naturalne bo liczby q i r są pierwsze. Mogą to więc być 1 i 6 lub 2 i 3. W pierwszym przypadku dostajemy $q=2$ i $r=7$, w drugim $q=3$ i $r=4$, ale 4 nie jest liczbą pierwszą. Ostatecznie dostajemy jako rozwiązanie zbiór {2, 5, 7} i wszystkie permutacje tego zbioru (czyli te liczby w innej kolejności).

3. Udowodnij, że jeśli liczby p i p^2+2 są pierwsze, to liczba p^3+2 też jest pierwsza.

Aby liczby p i p^2+2 były pierwsze, liczba p musi się równać 3. Jeśli p nie jest podzielne przez 3 liczba p^2 daje resztę 1 dzielenia przez 3 i wówczas liczba p^2+2 jest podzielna przez 3 i większa niż 3. Dla $p=3$, $p^2+2=11$, a $p^3+2=29$.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Długości boków czworokąta wypukłego ABCD są równe kolejno a,b,c oraz d. Udowodnić, że

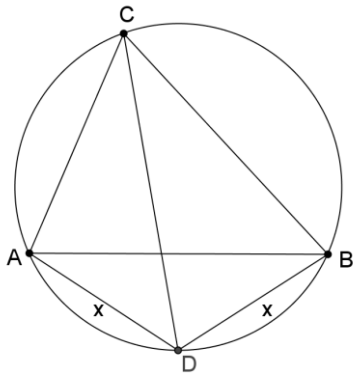
$$2 \cdot \mathrm{Pole}(ABCD) \leq ac + bd.$$

Oznaczmy przez e i f przekątne czworokąta ABCD, a przez α kąt między przekątnymi. Wówczas

$$2 \cdot \text{Pole}(ABCD) = 2 \cdot \frac{1}{2} ef \sin\alpha \leq ef \leq ac + bd$$

Ostatnia nierówność wynika z twierdzenia Ptolemeusza.

2. Dwusieczna kąta ACB przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie D ≠ C. Udowodnić, że 2|CD| > |AC| + |BC|.



Odcinki AD i DB są równej długości, bo łuki AD i DB są równe (CD jest dwusieczną). Oznaczmy je przez x. Wówczas z twierdzenia Ptolemeusza:

$$AC \cdot x + BC \cdot x = CD \cdot AB < CD \cdot 2x$$

Ostatnia nierówność wynika z nierówności trójkąta dla trójkąta ABD. Teraz wystarczy otrzymaną nierówność podzielić obustronnie przez x.

3. W wiadrze jest co najmniej 10 litrów mleka. Czy można odlać z niego dokładnie 6 litrów, posługując się dwoma naczyniami o pojemności odpowiednio 9 i 5 litrów?

Przyjmijmy, że zapis $[x, y, z]$ oznacza: w wiadrze jest x litrów mleka, w naczyniu dziewięciolitrowym y litrów, a w naczyniu pięciolitrowym z litrów. Niech a $(a \geq 10)$ oznacza ilość mleka w wiadrze na początku. Kolejne przelewania mogą wyglądać tak:

$$[a, 0, 0] - [a-5, 0, 5] - [a-5, 5, 0] - [a-10, 5, 5] - [a-10, 9, 1] -$$
$$[a-1, 0, 1] - [a-1, 1, 0] - [a-6, 1, 5] - [a-6, \mathbf{6}, 0]$$