Zestaw 11

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Udowodnij, że $\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}+\sqrt{7-\sqrt{48}}=1$

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}$$
$$=\left|\sqrt{2}-1\right|+\left|\sqrt{3}-\sqrt{2}\right|+\left|2-\sqrt{3}\right|=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+2-\sqrt{3}=1$$

2. Wykaż, że liczba $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ *jest niewymierna*

Zrobimy dowód nie wprost. Załóżmy, że $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=w$, gdzie w jest liczbą wymierną.

$$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=w$$
$$\sqrt{5}-\sqrt{2}=w\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$$
$$5-2\sqrt{10}+2=w^2(3-2\sqrt{6}+2)$$
$$2w^2\sqrt{6}-2\sqrt{10}=5w^2-7$$
$$24w^4-8w^2\sqrt{60}+40=(5w^2-7)^2$$

Z ostatniej równości wynika, że $\sqrt{60}$ jest liczbą wymierną i mamy sprzeczność.

3. Udowodnij, że jeżeli liczby całkowite a, b, c *spełniają równość* $a^2+b^2=c^2$ *to jedna z liczb* a, b *jest podzielna przez 3.*

Udowodnimy najpierw, że kwadrat liczby całkowitej może przy dzieleniu przez 3 dawać jedynie resztę 0 lub 1 (nigdy 2).

Każdą liczbę całkowitą możemy przedstawić w postaci $3k$, $3k+1$ lub $3k+2$.

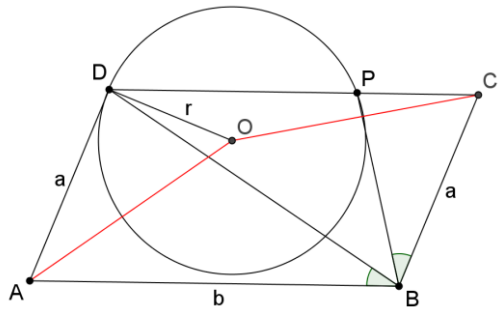
Policzymy kwadraty w każdym z tych przypadków:

$$(3k)^2=9k^2$$
$$(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$$
$$(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1$$

Gdyby żadna z liczb a, b nie była podzielna przez 3, to ich kwadraty dawałyby resztę 1 z dzielenia przez 3, więc ich suma dałaby resztę 2. To by oznaczało, że liczba c^2 daje resztę 2 z dzielenia przez 3, a to jest niemożliwe.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Punkt P leży na boku CD równoległoboku ABCD, przy czym ∡DBA = ∡CBP. Punkt O jest środkiem okręgu przechodzącego przez punkty D i P oraz stycznego do prostej AD w punkcie D. Wykazać, że AO = OC.



Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że $AO^2 = a^2 + r^2$. Pokażemy, że OC^2 też ma taką wartość. Z podobieństwa trójkątów DAB i PCB wynika proporcja $\frac{a}{b} = \frac{PC}{a}$ czyli $b \cdot PC = a^2$. Z drugiej strony zauważamy, że $b \cdot PC$ jest potęgą punktu C względem okręgu z zadania, czyli $b \cdot PC = OC^2 - r^2$. Dostajemy więc $OC^2 - r^2 = a^2$ czyli $OC^2 = a^2 + r^2$.

2. Udowodnij, że jeżeli liczba $1 + 3^n + 5^n$ jest pierwsza, to n jest podzielne przez 12.

Wypiszmy 12 pierwszych liczb postaci $1 + 3^n + 5^n$

n	$1 + 3^n + 5^n$	podzielne przez
1	9	3
2	35	5
3	153	3
4	707	7
5	3369	3
6	16355	5
7	80313	3
8	397187	7
9	1972809	3
10	9824675	5
11	49005273	3
12	244672067	liczba pierwsza

Stawiamy więc hipotezę, że:

a) jeżeli n jest nieparzyste, to nasza liczba jest podzielna przez 3,

b) jeśli daje resztę 2 przydzieleniu przez 4 to jest podzielna przez 5,

c) jeśli daje resztę 4 lub 8 przy dzieleniu przez 12 to jest podzielna przez 7

W dowodach wykorzystam kongruencje.

Dowód a)

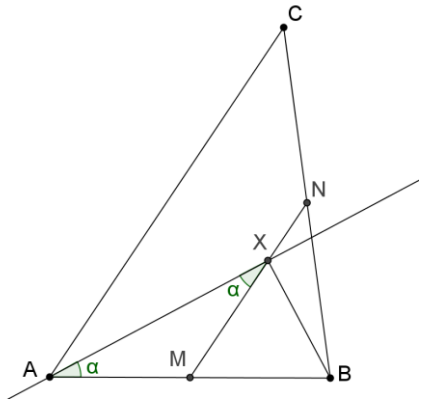
$5^n \equiv 2 \pmod 3$ gdy n jest nieparzyste, liczba $5^n + 1$ jest więc wtedy podzielna przez 3.

Dowód b)
$3^4 \equiv 1 \pmod 5$, jeżeli więc $3^n \equiv 4 \pmod 5$, to $3^{n+4} \equiv 4 \pmod 5$. Ponieważ $3^2 \equiv 4 \pmod 5$, więc dla każdego n naturalnego $3^{4n+2} \equiv 4 \pmod 5$. Suma $3^{4n+2} + 1$ jest więc podzielna przez 5.

Dowód c)
$3^4 \equiv 4 \pmod 7$, $3^8 \equiv 2 \pmod 7$, $3^{12} \equiv 1 \pmod 7$
$5^4 \equiv 2 \pmod 7$, $5^8 \equiv 4 \pmod 7$, $5^{12} \equiv 1 \pmod 7$
Dostajemy więc:

n	reszta z dzielenia 3^n przez 7	reszta z dzielenia 5^n przez 7	reszta z dzielenia $3^n + 5^n$ przez 7
$12k + 4$	4	2	6
$12k + 8$	2	4	6

3. W trójkącie ABC $(AB < AC)$ punkt X jest rzutem prostokątnym punktu B na dwusieczną kąta BAC. Punkty M i N są środkami odpowiednio boków AB i BC. Wykaż, że punkty M, X i N są współliniowe.



Oznaczmy kąt BAC przez 2α. Odcinek MN jest równoległy do odcinka AC, więc kąt BMN też ma miarę 2α. Jeśli pokażemy, że kąt BMX ma miarę 2α, będzie to oznaczało, że punkt X leży na odcinku MN.
Trójkąt ABX jest prostokątny. Punkt M jest więc środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie, czyli odcinki AM i MX mają tę samą długość. Trójkąt AMX jest równoramienny, więc kąt MXA ma miarę α. Kąt BMX jako kąt zewnętrzny w trójkącie AMX ma miarę 2α. Zrobione.