Zestaw 15

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Na brzegu kwadratu o boku n ($n \geq 2$ jest liczbą naturalną) wyróżniono $2n$ punktów różnych od wierzchołków, które dzielą każdy z boków na odcinki o całkowitych długościach. Udowodnij, że pewne cztery wyróżnione punkty są wierzchołkami równoległoboku, którego środek pokrywa się z środkiem kwadratu.

2. Danych jest 111 dodatnich liczb całkowitych. Wykaż, że spośród nich można wybrać 11 takich liczb, których suma jest podzielna przez 11.

3. Wykazać, ze z dowolnego zbioru 100 dodatnich liczb całkowitych można tak wybrać pewien niepusty podzbiór, by suma liczb z tego podzbioru była podzielna przez 100.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Dany jest sześciokąt wypukły ABCDEF. Udowodnij, że środki ciężkości trójkątów ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB tworzą sześciokąt o przeciwległych bokach równych i równoległych.

2. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków AB, BC, CA odpowiednio w punktach C’, A’, B’. Przez środki odcinków A’B’, B’C’, C’A’ prowadzimy proste prostopadłe odpowiednio do boków AB, BC, CA. Udowodnij, że proste te przecinają się w jednym punkcie.

3. Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC. Okręgi wpisane w trójkąty AEF, BFD, CDE są styczne do okręgu wpisanego w trójkąt DEF. Udowodnij, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązania należy oddać do piątku 29 grudnia do godziny 15.15 koordynatorowi konkursu panu Jarosławowi Szczepaniakowi lub przesłać na adres jareksz@interia.pl do północy w piątek 29 grudnia.