Zestaw 12

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Rozwiąż układ równań:

$$ab = 1 \quad bc = 2 \quad cd = 3 \quad de = 4 \quad ea = 5$$

Układ rozwiążemy metodą podstawiania:

$$b = \frac{1}{a}, \qquad c = \frac{2}{b} = 2a, \quad d = \frac{3}{c} = \frac{3}{2a}, \quad e = \frac{4}{d} = \frac{8a}{3}, \quad a = \frac{5}{e} = \frac{15}{8a}$$

Z ostatniej równości wynika, że $a^2 = \frac{15}{8}$ czyli $a = \frac{\sqrt{30}}{4}$ lub $a = -\frac{\sqrt{30}}{4}$

Dostajemy ostatecznie dwie piątki liczb $(a, b, c, d, e) = \left(\frac{\sqrt{30}}{4}, \frac{4}{\sqrt{30}}, \frac{\sqrt{30}}{2}, \frac{6}{\sqrt{30}}, \frac{2\sqrt{30}}{3}\right)$ lub $\left(-\frac{\sqrt{30}}{4}, -\frac{4}{\sqrt{30}}, -\frac{\sqrt{30}}{2}, -\frac{6}{\sqrt{30}}, -\frac{2\sqrt{30}}{3}\right)$

2. Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x + y + z = 14 \\ x + y + t = 10 \\ y + z + t = 15 \\ x + z + t = 12 \end{cases}$$

Oznaczmy przez S sumę niewiadomych.

$$S = x + y + z + t$$

Wówczas nasz układ możemy zapisać tak:

$$\begin{cases} S - t = 14 \\ S - z = 10 \\ S - x = 15 \\ S - y = 12 \end{cases}$$

Po dodaniu stronami otrzymujemy

$$4S - S = 51$$

czyli $S = 17$

Stąd już łatwo policzymy, że

$$\begin{cases} t = 3 \\ z = 7 \\ x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$$

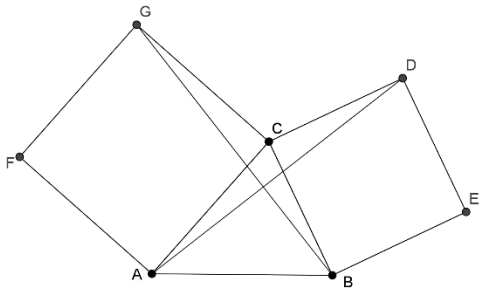
3. Rozwiąż w liczbach całkowitych równanie $x^2 + y^2 = 2001$

Ponieważ kwadrat liczby całkowitej może z dzielenia przez 3 dawać tylko resztę 0 lub 1, więc jeżeli $x^2 + y^2$ jest podzielne przez 3, to obie liczby x, y są podzielne przez 3. Podstawiamy więc $x = 3a, y = 3b$ i dostajemy

$$9a^2 + 9b^2 = 2001$$

Lewa strona jest podzielna przez 9, a prawa nie, więc nasze równanie nie ma rozwiązań.

LICEUM



1. Na bokach BC i AC trójkąta ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie kwadraty $BCDE$ i $CAFG$. Wykaż, że odcinki AD i BG są prostopadłe i równej długości.

Obróćmy trójkąt ACD wokół punktu C o 90° tak, żeby punkt D przeszedł na punkt B. Wówczas punkt A przejdzie na punkt G, a odcinek AD na odcinek BG. Ponieważ obracaliśmy o 90°, nasze odcinki są prostopadłe.

2. Rozwiąż równanie
$|x^4 - x| + |x^2 - x^3| = |x^4 - x^3 + x^2 - x|$

Można oczywiście rozpatrywać przypadki, ale komu by się chciało.

Prościej skorzystać z twierdzenia, które mówi, że dla dowolnych liczb a, b:
$|a| + |b| \geq |a + b|$, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy któraś z liczb a, b jest zerem, lub obie te liczby są tego samego znaku, (jeśli są tego samego znaku, to ich iloczyn jest dodatni).

Nasze równanie jest właśnie postaci $|a| + |b| = |a + b|$. Wystarczy więc rozpatrzeć alternatywę: $x^4 - x = 0$ lub $x^2 - x^3 = 0$ lub $(x^4 - x)(x^2 - x^3) > 0$

Rozwiązanie to zbiór $(-\infty, 0\rangle \cup \{1\}$.

3. Rozwiąż w liczbach całkowitych równanie $x^2 + y^2 = 2016$

Ponieważ kwadrat liczby całkowitej może z dzielenia przez 3 dawać tylko resztę 0 lub 1, więc jeżeli $x^2 + y^2$ jest podzielne przez 3, to obie liczby x, y są podzielne przez 3. Podstawiamy więc $x = 3a$, $y = 3b$ i dostajemy

$$9a^2 + 9b^2 = 2016$$

Dzielimy obustronnie przez 9 i dostajemy

$$a^2 + b^2 = 224$$

Teraz rozważamy podzielność przez 4. Kwadrat liczby parzystej daje resztę 0 przy dzieleniu przez 4, kwadrat liczby nieparzystej daje resztę 1. Jeśli więc $a^2 + b^2$ jest podzielne przez 4, to obie liczby a, b są parzyste. Podstawiamy $a = 2c$, $b = 2d$ i dostajemy

$$4c^2 + 4d^2 = 224$$

Dzielimy przez 4:

$$c^2 + d^2 = 56$$

Znowu suma kwadratów jest podzielna przez 4, podstawiamy więc $c = 2e$, $d = 2f$ i dostajemy:

$$4e^2 + 4f^2 = 56$$
$$e^2 + f^2 = 14$$

To już łatwo ręcznie sprawdzić, że nie ma rozwiązań.

.