Zestaw 13

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Udowodnij, że dla liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność:

$$(a+1)(b+1)(c+1) \geq 8\sqrt{abc}$$

Zauważmy że $a+1 \geq 2\sqrt{a}$ (bo $a - 2\sqrt{a} + 1 = \left(\sqrt{a}-1\right)^2 \geq 0$). Podobnie $b+1 \geq 2\sqrt{b}$ i $c+1 \geq 2\sqrt{c}$. Jeśli te nierówności pomnożymy stronami, to dostajemy tezę.

2. Udowodnij, że jeżeli liczby a, b, c są długościami boków trójkąta, to:

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc$$

To, że a, b, c są długościami boków trójkąta gwarantuje nam, że liczby w nawiasach są dodatnie. Zróbmy podstawienie $a+b-c = x$, $b+c-a = y$, $c+a-b = z$. Wówczas $a = \frac{x+z}{2}$, $b = \frac{x+y}{2}$, $c = \frac{y+z}{2}$ i nasza nierówność przybiera postać

$$xyz \leq \frac{x+z}{2} \cdot \frac{x+y}{2} \cdot \frac{y+z}{2}$$

Aby udowodnić tę nową nierówność wystarczy pomnożyć stronami trzy nierówności między średnimi: $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$, $\frac{y+z}{2} \geq \sqrt{yz}$, $\frac{x+z}{2} \geq \sqrt{xz}$

3. Udowodnij, że jeżeli $a^2 + b^2 = 2$ to $a + b \leq 2$

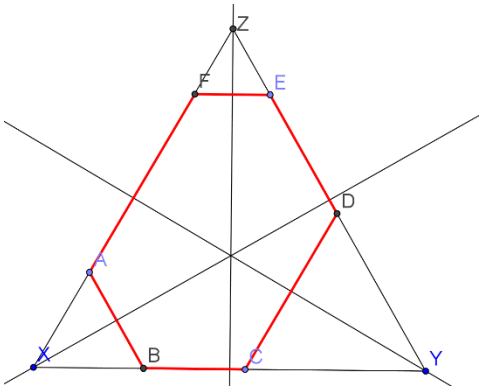
Do dowodu użyjmy nierówności między średnią kwadratową a średnią arytmetyczną:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$$

Jeśli w tej nierówności wstawimy 2 w miejsce $a^2 + b^2$, to szybko dostajemy tezę.

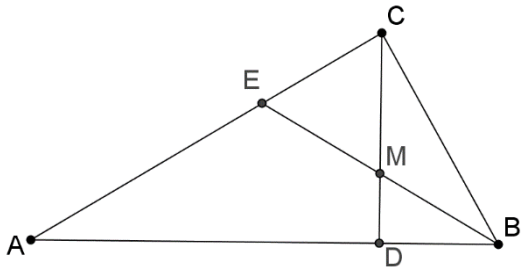
KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Miara każdego kąta sześciokąta ABCDEF jest równa 120°. Udowodnij, że symetralne odcinków AB, CD i EF przecinają się w jednym punkcie.



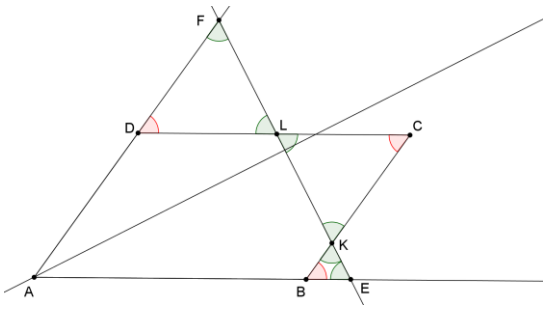
Uzupełnijmy nasz sześciokąt do trójkąta, jak na rysunku powyżej. Narożne trójkąty ABX, CDY, FEZ są równoboczne, a więc w każdym z nich symetralna podstawy jest dwusieczną kąta przy wierzchołku. Wynika stąd, że symetralne odcinków AB, CD i EF są dwusiecznymi kątów trójkąta XYZ, a w trójkącie dwusieczne przecinają się w jednym punkcie.

2. Wyznacz kąty trójkąta ABC, którego wysokość CD i dwusieczna BE przecinają się w takim punkcie M, że CM = 2DM i BM = ME.



Z twierdzenia o dwusiecznej zastosowanego do trójkąta DBC dostajemy, że BC = 2BD. Stąd wnioskujemy, że kąt DBC ma 60°. Trójkąt BMC jest równoramienny, bo kąty MBC i MCB mają po 30°. Więc CM=MB=ME. Trójkąt EMC jest więc równoboczny (bo równoramienny z kątem 60°). Teraz już łatwo policzyć, że nasz trójkąt to trójkąt 30, 60, 90.

3. Punkty K i L znajdują się odpowiednio na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$, przy czym $AB + BK = AD + DL$. Udowodnij, że dwusieczna kąta BAD jest prostopadła do prostej KL.



.

Oznaczmy $AB + BK = AD + DL = x$ i niech boki równoległoboku mają długości a i b. Wykażemy najpierw, że trójkąt KLC jest równoramienny. Istotnie $CL = a + b - x = CK$. Przedłużmy teraz bok AB do przecięcia z prostą KL i oznaczmy punkt przecięcia przez E oraz bok AD do przecięcia z prostą KL (punkt przecięcia to F). Kąty czerwone na rysunku są równe z twierdzenia o kątach naprzemianległych. Równość kątów zielonych wynika z twierdzenia o kątach wierzchołkowych oraz z sumy kątów w trójkącie. Dostajemy więc, że trójkąty DLF i

EBK są równoramienne. Stąd dalej wynika, że $AE = x = AF$, a więc również trójkąt AEF jest równoramienny, a w trójkącie równoramiennym dwusieczna kąta przy wierzchołku jest prostopadła do podstawy bo pokrywa się z wysokością.