Zestaw 14

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Uzasadnij, że dowolnej liczby naturalnej n:

$$1 + 7 + 13 + \cdots + (6n - 5) = n(3n - 2)$$

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

Dla $n = 1$ mamy $1 = 1(3 - 2)$ i się zgadza.

Załóżmy, że

$$1 + 7 + 13 + \cdots + (6n - 5) = n(3n - 2)$$

Pokażemy, że

$$1 + 7 + 13 + \cdots + (6n - 5) + (6n + 1) = (n + 1)(3(n + 1) - 2)$$

Dodajmy do założenia indukcyjnego obustronnie $6n + 1$

$$1 + 7 + 13 + \cdots + (6n - 5) + (6n + 1) = n(3n - 2) + 6n + 1 = 3n^2 + 4n + 1$$
$$= 3n^2 + 6n + 3 - 2n - 2 = 3(n + 1)^2 - 2(n + 1) = (n + 1)(3(n + 1) - 2)$$

2. Uzasadnij, że dowolnej liczby naturalnej n liczba $10^n + 4^n - 2$ jest podzielna przez 3

Przeprowadzimy dowód indukcyjny

Dla $n = 1$ mamy $10 + 4 - 2 = 12$, co jest liczbą podzielną przez 3

Załóżmy, że $10^n + 4^n - 2 = 3k$; chcemy wykazać podzielność przez 3 liczby $10^{n+1} + 4^{n+1} - 2$

$$10^{n+1} + 4^{n+1} - 2 = 10(10^n + 4^n - 2) + 6 \cdot 4^n + 18 = 10 \cdot 3k + 6 \cdot 4^n + 18$$
$$= 3(10k + 2 \cdot 4^n + 6)$$

A $10k + 2 \cdot 4^n + 6$ jest oczywiście liczbą całkowitą.

3. Uzasadnij, że dowolnej liczby naturalnej n:

$$(n + 1)(n + 2)(n + 3) \cdot \ldots \cdot 2n = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n - 1)$$

Dowód indukcyjny:

Dla $n = 1$ lewa strona równa się 2 i prawa też 2.

Założenie indukcyjne:

$$(n + 1)(n + 2)(n + 3) \cdot \ldots \cdot 2n = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n - 1)$$

Teza indukcyjna:

$$(n+2)(n+3)(n+4)\cdot\ldots\cdot 2n\cdot(2n+1)\cdot 2(n+1)$$
$$= 2^{n+1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)$$

Policzmy wartość wyrażenia $(n+2)(n+3)(n+4)\cdot\ldots\cdot 2n\cdot(2n+1)\cdot 2(n+1)$.

Z założenia indukcyjnego:

$$(n+2)(n+3)\cdot\ldots\cdot 2n = \frac{2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{(n+1)}$$

Mamy więc:

$$(n+2)(n+3)(n+4)\cdot\ldots\cdot 2n\cdot(2n+1)\cdot 2(n+1)$$
$$= \frac{2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{(n+1)}\cdot(2n+1)\cdot 2(n+1)$$
$$= 2^{n+1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)$$

KLASY TRZECIE I CZWARTE

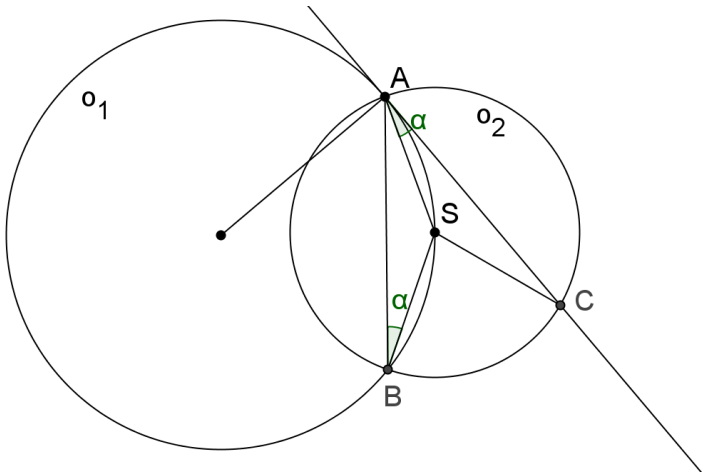
1. Dane są nieujemne liczby wymierne a i b. Udowodnij, że jeżeli suma $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ jest wymierna, to każda z liczb $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ jest wymierna.

Niech $\sqrt{a}+\sqrt{b}=w$. Jeżeli $w=0$, to $\sqrt{a}=0$ i $\sqrt{b}=0$ i teza zachodzi.
Załóżmy, że $w\neq 0$. Wówczas:

$$\sqrt{a} = w-\sqrt{b}$$
$$a = w^2-2w\sqrt{b}+b$$
$$\sqrt{b} = \frac{w^2+b-a}{2w}$$

czyli $\sqrt{b}$ jest liczbą wymierną. $\sqrt{a}$ jest wymierny, bo $\sqrt{a}=w-\sqrt{b}$.

2. Okrąg o_1 przechodzi przez środek okręgu o_2 i przecina go w punktach A i B. Udowodnij, że cięciwa AB i odcinek stycznej AC mają jednakową długość.



Kąty CAS i ABS są równe jako kąty wpisany i dopisany oparte na tym samym łuku. Trójkąty równoramienne ABS i ACS są więc przystające.

3. Zdecyduj, czy liczba $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\ddots+\frac{1}{50}}}} + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\ddots+\frac{1}{50}}}}$ *jest większa czy mniejsza niż 1.*

To zadanie pokazuje, jak można trudną arytmetykę sprowadzić do prostej algebry. Oznaczmy liczbę $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\ddots+\frac{1}{50}}}}$ przez x.

Wyjściowa liczba przybiera wówczas postać $\frac{1}{1+x} + x$. Przekształćmy ją nieco:

$$\frac{1}{1+x} + x = \frac{1+x+x^2}{1+x} = 1 + \frac{x^2}{1+x}$$

Nasza liczba jest więc większa od 1, bo x jest liczbą dodatnią.