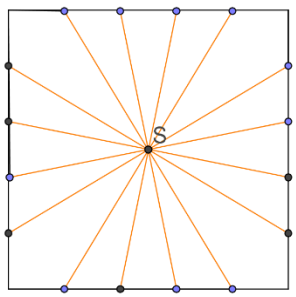
Zestaw 15

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Na brzegu kwadratu o boku n ($n \geq 2$ jest liczbą naturalną) wyróżniono $2n$ punktów różnych od wierzchołków, które dzielą każdy z boków na odcinki o całkowitych długościach. Udowodnij, że pewne cztery wyróżnione punkty są wierzchołkami równoległoboku, którego środek pokrywa się z środkiem kwadratu.



Na każdym boku kwadratu jest $n-1$ punktów, które mogą dzielić ten bok na odcinki o całkowitych długościach. Wszystkich takich punktów jest więc $4n-4$. Połączmy w pary punkty które są symetryczne względem środka kwadratu tworząc odcinki jak na rysunku powyżej. Takich par jest $2n-2$. Możemy więc wybrać co najwyżej $2n-2$ punktów w taki sposób, by dla każdego odcinka wybrany był tylko jeden koniec. Ponieważ wybieramy $2n$ punktów, więc istnieją dwa odcinki, dla których wybraliśmy oba końce. Są to przekątne szukanego równoległoboku.
Możemy w tym zadaniu skorzystać z zasady szufladkowej Dirichleta. Szufladami są pomarańczowe odcinki (jest ich $2n-2$), a kulami $2n$ wybranych punktów.

2. Danych jest 111 dodatnich liczb całkowitych. Wykaż, że spośród nich można wybrać 11 takich liczb, których suma jest podzielna przez 11.

Dzieląc liczbę całkowitą przez 11 możemy otrzymać jedną z 11 reszt: 0, 1, 2, …, 10. Ponieważ mamy 111 liczb, więc co najmniej 11 daje tę samą resztę z dzielenia przez 11 (gdyby wszystkie reszty występowały nie więcej niż 10 razy, to mielibyśmy co najwyżej 110 liczb). Oznaczmy tę najczęściej występującą resztę przez r i dodajmy 11 liczb dających resztę r.

$$11a+r+11b+r+11c+r+11d+r+11e+r+11f+r+11g+r+11h+r+11i+r+11j+r+11k+r=11(a+b+c+d+e+f+g+h+i+j+k)+11r$$

Suma dwóch liczb podzielnych przez 11 jest liczbą podzielną przez 11.

3. Wykazać, ze z dowolnego zbioru 100 dodatnich liczb całkowitych można tak wybrać pewien niepusty podzbiór, by suma liczb z tego podzbioru była podzielna przez 100.

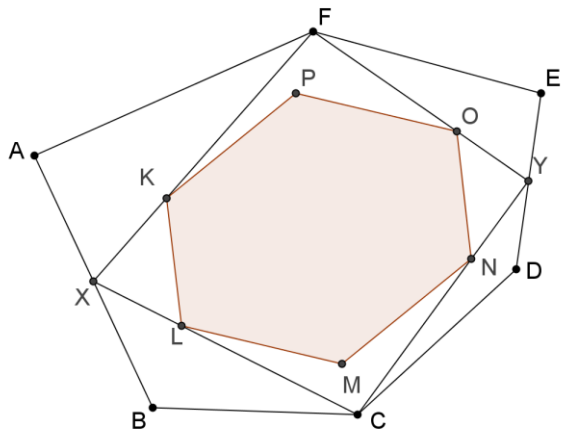
Oznaczmy elementy naszego zbioru $a_1, a_2, \dots, a_{100}$.
Rozważmy sumy:

$$a_1$$
$$a_1 + a_2$$
$$a_1 + a_2 + a_3$$
$$\dots$$
$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100}$$

Jeżeli któraś z tych sum jest równa 100, to sprawa załatwiona. Jeżeli żadna nie jest równa 100, to istnieją dwie sumy dające taką samą resztę z dzielenia przez 100 (sum jest 100, a reszt różnych od 0 – 99). Wystarczy od większej sumy odjąć mniejszą i mamy tezę.

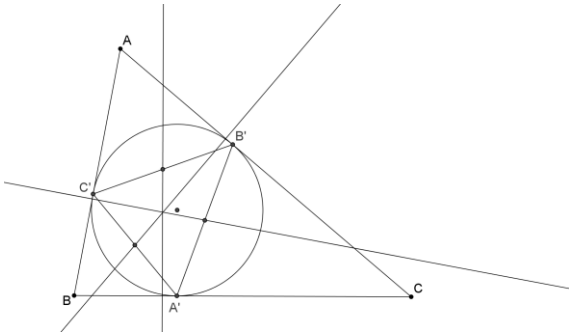
KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Dany jest sześciokąt wypukły ABCDEF. Udowodnij, że środki ciężkości trójkątów ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB tworzą sześciokąt o przeciwległych bokach równych i równoległych.



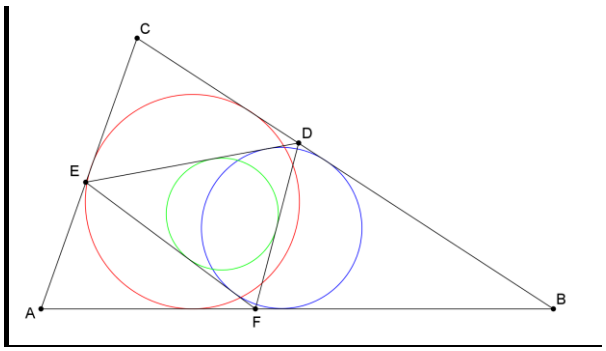
Wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku (X to środek odcinka AB, Y - środek odcinka DE). Wykażemy, że odcinki KL i NO są równe i równoległe, dla pozostałych par dowód będzie analogiczny. Rozważmy jednokładność o środku w punkcie X i skali 1/3 oraz jednokładność o środku w punkcie Y i skali 1/3. Pierwsza przekształca przekątną FC w KL a druga przekształca przekątną FC w NO no i mamy tezę.

2. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków AB, BC, CA odpowiednio w punktach C', A', B'. Przez środki odcinków A'B', B'C', C'A' prowadzimy proste prostopadłe odpowiednio do boków AB, BC, CA. Udowodnij, że proste te przecinają się w jednym punkcie.



Rozważmy jednokładność o środku w środku ciężkości trójkąta A’B’C’ i skali -2. Ta jednokładność przekształca proste, o których mowa w zadaniu, na proste prostopadłe do boków trójkąta ABC i przechodzące przez punkty A’, B’ i C’, czyli proste zawierające promienie okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Skoro proste docelowe przecinają się w jednym punkcie, to i wyjściowe też.

3. Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC. Okręgi wpisane w trójkąty AEF, BFD, CDE są styczne do okręgu wpisanego w trójkąt DEF. Udowodnij, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.



W dowodzie wykorzystamy następujący lemat: w czworokąt ABCD da się wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy okręgi wpisane w trójkąty ABC i ADC są styczne. Nietrudny dowód lematu pominę (zrobiliśmy ten dowód na ostatnim kółku)

Z lematu wynika, że istnieje okrąg wpisany w czworokąt FBDE (na rysunku niebieski). Rozważmy dwie jednokładności: o środku w punkcie E przekształcającą okrąg zielony (wpisany w trójkąt DEF) na niebieski i drugą, o środku w punkcie B przekształcającą okrąg niebieski na czerwony (wpisany w trójkąt ABC). Zgodnie z twierdzeniem o składaniu jednokładności, ich złożenie jest jednokładnością o środku współliniowym z punktami B i E. Wykazaliśmy w ten sposób, że prosta BE przechodzi przez środek jednokładności przekształcającej okrąg zielony na czerwony. Podobnie pokażemy, że przez ten środek przechodzą proste AD i CF.