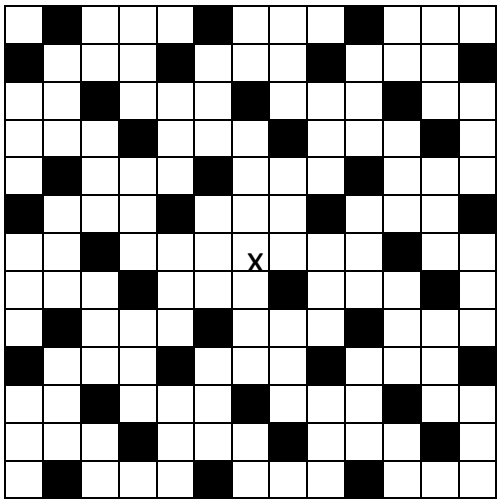
Zestaw 16

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

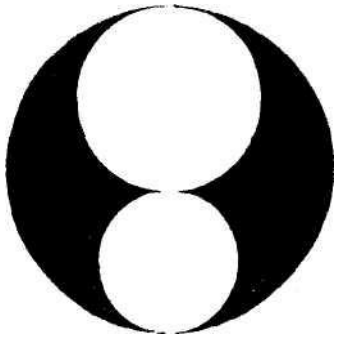
1. Czy można pokryć szachownicę o wymiarach 13×13 klockami 1×4 w taki sposób, że tylko środkowe pole nie jest zakryte?

Nie można. Aby się o tym przekonać, pokolorujmy szachownicę, jak na rysunku poniżej:



Każdy klocek 1×4 przykryje dokładnie jedno pole czarne. Pól czarnych jest 41, a my potrzebujemy 42 klocki.

2. Na rysunku są trzy koła wzajemnie styczne, których środki są współliniowe. Udowodnij, że suma pól dwóch mniejszych kół jest równa polu zacienionej części największego koła tylko wtedy, gdy mniejsze koła mają jednakowe promienie.



Oznaczmy przez x i y promienie mniejszych kół. Warunek podany w treści zadania można zapisać równaniem tak:

$$\pi x^2 + \pi y^2 = \frac{1}{2}\pi(x+y)^2$$
$$2x^2 + 2y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$x^2 - 2xy + y^2 = 0$$
$$(x-y)^2 = 0$$
$$x = y$$

3. Oblicz sumę:

$$(2^{-2024}+1)^{-1} + (2^{-2023}+1)^{-1} + \cdots + (2^{-1}+1)^{-1} + (2^{0}+1)^{-1} + (2^{1}+1)^{-1} + \cdots + (2^{2023}+1)^{-1} + (2^{2024}+1)^{-1}$$

Rozważmy parę $(2^{-2024}+1)^{-1}+(2^{2023}+1)^{-1}$. Podstawmy $2^{2024}=a$. Nasza równość przybierze wtedy postać: $\left(\frac{1}{a}+1\right)^{-1}+(a+1)^{-1}$. Przekształćmy:

$$\left(\frac{1}{a}+1\right)^{-1}+(a+1)^{-1}=\left(\frac{1+a}{a}\right)^{-1}+(a+1)^{-1}=\frac{a}{1+a}+\frac{1}{1+a}=1$$

Mamy 2024 par dających w sumie 1 oraz w środku liczbę $(2^0+1)^{-1}=\frac{1}{2}$. Nasza suma wynosi więc $2024\frac{1}{2}$.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Mamy 20 kart z liczbą 6, która staje się liczbą 9, gdy obrócimy kartę. Karty, obrócone w sposób losowy (na niektórych widzimy 6, na pozostałych 9) układamy w stos. Następnie bierzemy grupę kart, na której wierzchu jest karta z 9 i obracamy wszystkie karty. Jak ustawić karty, żeby powyższą operację można było powtarzać w nieskończoność?

Nie da się tak ustawić kart. Potraktujmy szóstki i dziewiątki jako cyfry i rozważmy 20-cyfrową liczbę, której cyframi są cyfry ze stosu w kolejności od góry na dół. Nasza operacja za każdym razem zmniejsza tę liczbę, a nie możemy jej zmniejszać w nieskończoność, bo nigdy nie będzie ona mniejsza od liczby złożonej z dwudziestu szóstek.

2. Udowodnij, że żaden element zbioru $A=\{12n+2, n\in N\}$ nie jest kwadratem liczby całkowitej.

Elementy tego zbioru dają resztę 2 z dzielenia przez 3, a jak doskonale wiecie, kwadraty liczb całkowitych nigdy nie dają reszty 2 z dzielenia przez 3.

3. Wykaż, że $(2n+2)$ −cyfrowa liczba $\underbrace{11\ldots1}_{n}\underbrace{22\ldots2}_{n+1}5$ jest, dla dowolnego n, kwadratem liczby naturalnej.

Podstawmy $\underbrace{11\ldots1}_{n}=x$. Naszą liczbę możemy zapisać tak: $x\cdot10^{n+2}+2x\cdot100+25$.

Poprzekształcajmy:

$$x\cdot10^{n+2}+2x\cdot100+25=100x\cdot10^{n}+200x+25=$$
$$100x\left(\underbrace{99\ldots9}_{n}+1\right)+200x+25=100x(9x+1)+200x+25=$$
$$900x^2+100x+200x+25=900x^2+300x+25=(30x+5)^2$$