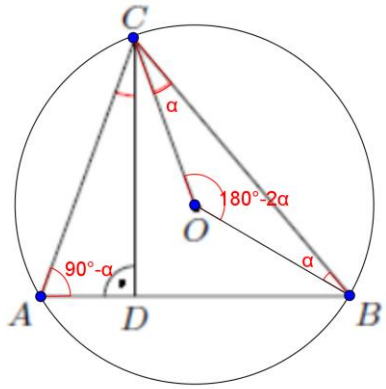
Zestaw 19

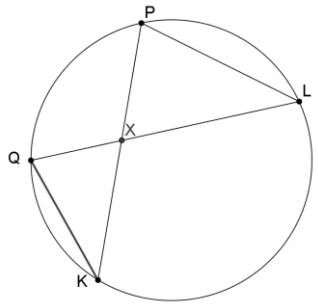
KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Punkt D jest rzutem prostokątnym punktu C na prosta AB. Wykazać, że $\measuredangle ACD = \measuredangle BCO$.



Chyba rysunek wszystko wyjaśnia ☺.

2. Na brzegu jeziora w kształcie koła znajdują się cztery przystanie: K, L, P, Q. Z przystani K wypływa kajak kierując się do przystani Q, a z przystani L w tym samym momencie wypływa łódka kierując się do przystani P. Wiadomo, że gdyby zachowując swe prędkości kajak popłynął w kierunku przystani P, a łódka w kierunku przystani Q, to doszłoby do zderzenia. Udowodnij, że kajak i łódka dobiją do celu w tym samym czasie.

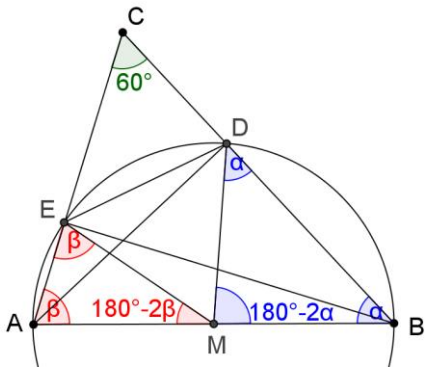


Oznaczmy przez v_k prędkość kajaka, a przez v_l prędkość łódki. Czasy ich dotarcia do punktu X są jednakowe, więc $\frac{|LX|}{v_l} = \frac{|KX|}{v_k}$ czyli

(*) $\frac{|LX|}{|KX|} = \frac{v_l}{v_k}$.

Trójkąty QKX i XLP są podobne (kąty wierzchołkowe, kąty wpisane oparte na tym samym łuku). Wynika stąd proporcja $\frac{|LX|}{|KX|} = \frac{|LP|}{|KQ|}$, co w powiązaniu z (*) daje $\frac{|LP|}{|KQ|} = \frac{v_l}{v_k}$ czyli $\frac{|LP|}{v_l} = \frac{|KQ|}{v_k}$, a to oznacza, że czasy dotarcia kajaku i łódki do celu będą takie same.

3. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, przy czym $\measuredangle ACB = 60°$. Punkty D i E są rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów A i B na proste BC i AC. Punkt M jest środkiem boku AB. Wykazać, ze trójkąt DEM jest równoboczny.



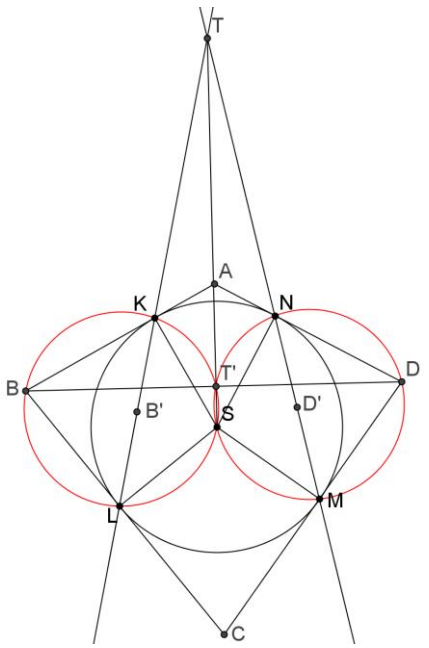
Na czworokącie $ABDE$ da się opisać okrąg, bo kąty ADB i AEB są równe (oba są proste). Punkt M jest środkiem tego okręgu, więc odcinki EM i DM są równe jako promienie. Udowodniliśmy, że nasz trójkąt jest równoramienny. Jeśli udowodnimy, że kąt EMD ma 60°, to zadanie zrobione.
Trójkąty AME i MBD są równoramienne, stąd oznaczenia kątów jak na rysunku.
Wykorzystamy fakt, że $\alpha + \beta = 120°$, bo kąt ACB ma 60°. Mamy:

$$180° - 2\beta + 180° - 2\alpha + \measuredangle EMD = 180°$$
$$360° - 2(\alpha + \beta) + \measuredangle EMD = 180°$$
$$360° - 2 \cdot 120° + \measuredangle EMD = 180°$$
$$\measuredangle EMD = 60°$$

Trójkąt DEM jest równoboczny jako równoramienny z kątem 60°.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Okrąg o środku w punkcie S i wpisany w czworokąt wypukły ABCD jest styczny do boków AB, BC, CD, DA odpowiednio w punktach K, L, M, N. Proste KL i MN przecinają się w punkcie T. Wykaż, że proste BD i ST są prostopadłe.



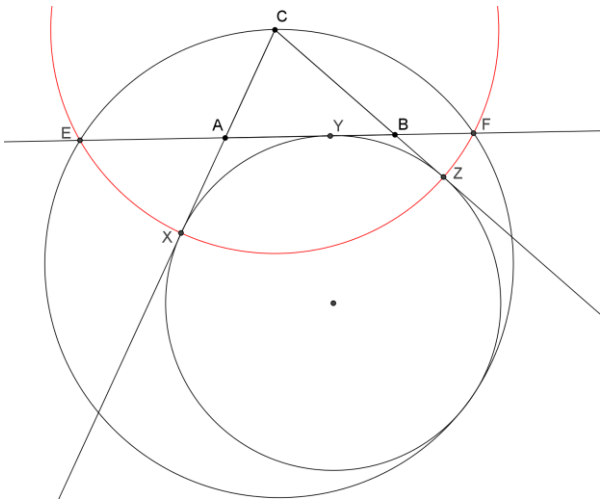
Rozważmy inwersję względem okręgu wpisanego w czworokąt ABCD. W tej inwersji prosta KL przejdzie na okrąg przechodzący przez punkty S, K, L, a prosta MN przejdzie na okrąg przechodzący przez punkty S, M, N. Ponieważ punkt T należy do obu prostych KL i MN, więc jego obrazem będzie punkt wspólny czerwonych okręgów różny od punktu S. W tej inwersji punkt D przejdzie na środek odcinka MN, a punkt B na środek odcinka KL (przypomnijmy sobie jedną z metod konstruowania obrazu inwersyjnego punktu). Kąt ST'D jest równy kątowi SD'T, jest więc prosty. Analogicznie kąt ST'B jest prosty, no i mamy tezę.

Uwaga. Inną metodą rozwiązania tego zadania jest wykazanie, że prosta TS jest osią potęgową okręgów (B, BK) i (D, DN)

2. Dany jest trójkąt ABC. Punkty E i F leżą na prostej AB oraz spełniają równości

$$CE = CF = \frac{AB + BC + CA}{2}$$

Udowodnić, że okrąg opisany na trójkącie EFC jest styczny do okręgu dopisanego do boku AB trójkąta ABC.



Przez X, Y, Z oznaczmy punkty styczności okręgu dopisanego odpowiednio z prostymi AC, AB i BC. Wyrażenie $\frac{AB+BC+CA}{2}$ to połowa obwodu. Zauważmy, że również odcinki CX i CZ mają długość równą połowie obwodu (są równej długości i ich suma daje obwód, co udowodnimy z twierdzenia o odcinkach stycznych - CX ma długość równą łamanej CAY, a CZ - długość równą CBY). Dlatego okrąg o środku w punkcie C i promieniu równym połowie obwodu przejdzie przez punkty EXZF. Rozważmy inwersję względem tego okręgu. Okrąg dopisany, jako prostopadły do okręgu inwersyjnego przejdzie sam na siebie, zaś prosta EF przejdzie na okrąg opisany na trójkącie EFC. Ponieważ prosta EF jest styczna do okręgu dopisanego, więc okrąg opisany na EFC też.

2. Wyznacz taką największą liczbę naturalną k, aby dla każdej liczby naturalnej nieparzystej n liczba $n^6 - n^4 - n^2 + 1$ była podzielna przez 2^k

$$n^6 - n^4 - n^2 + 1 = n^4(n^2 - 1) - (n^2 - 1) = (n^2 - 1)(n^4 - 1)$$
$$= (n - 1)^2(n + 1)^2(n^2 + 1)$$

Liczby $n-1$ i $n+1$ to kolejne liczby parzyste, więc jedna z nich jest podzielna przez 4, liczba n^2+1 też jest parzysta, możemy więc policzyć, że wyjściowa liczba jest zawsze podzielna przez 2^7.