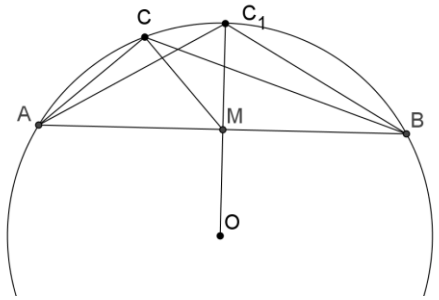
Zestaw 20

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. W trójkącie ABC punkt M jest środkiem boku AB oraz $\sphericalangle ACB = 120°$*. Udowodnij, że*

$$CM \geq \frac{\sqrt{3}}{6} AB$$

Pokażemy najpierw, że odcinek CM jest najkrótszy, gdy trójkąt ABC jest równoramienny. Wpiszmy nasz trójkąt w okrąg. Z nierówności trójkąta wynika, że długość łamanej OMC jest większa lub równa długości promienia okręgu. Równa jest, gdy kąt OMC ma 180°, czyli kąt AMC jest prosty, czyli trójkąt ABC jest równoramienny.

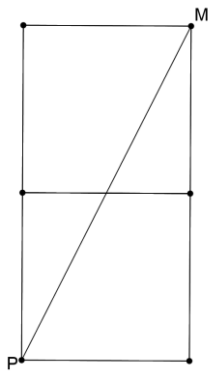


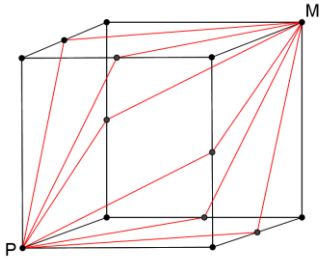
Teraz pokażemy, że jeżeli trójkąt ABC jest równoramienny, to zachodzi równość $CM = \frac{\sqrt{3}}{6} AB$.

W takim wypadku trójkąt AMC jest trójkątem 30°, 60°, 90° i $CM = \frac{\sqrt{3}}{3} AM = \frac{\sqrt{3}}{6} AB$.

2. Na przeciwległych wierzchołkach sześciennego pudła o krawędzi 1 siedzą pająk i mucha. Pająk chce przejść najkrótsza możliwą droga po powierzchni pudła do wierzchołka, w którym znajduje się mucha. Jak długą drogę musi pokonać? Którędy powinien iść? Ile ma do wyboru różnych najkrótszych dróg?

Aby odpowiedzieć na te pytania wystarczy popatrzeć na dwie sąsiadujące ściany sześcianu:

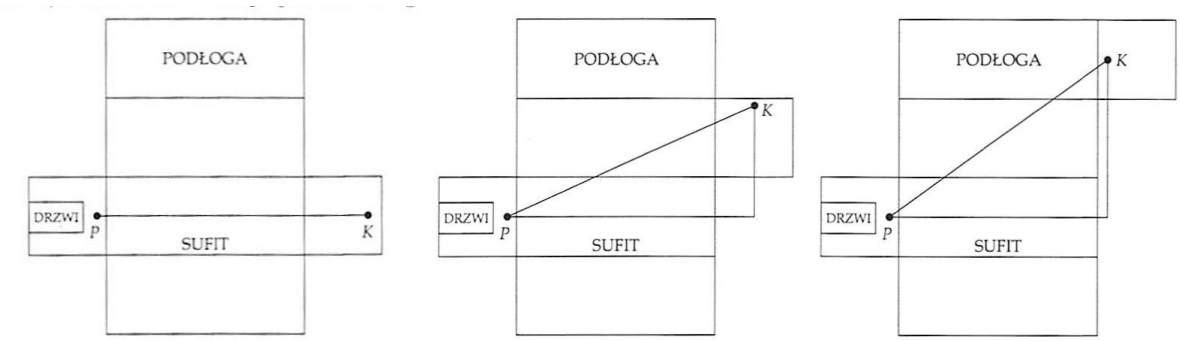




Do wyboru jest 6 dróg. Każda ma długość $\sqrt{5}$.

3. Budowane pomieszczenie w kształcie prostopadłościanu ma mieć wysokość 3 m, podłoga zaś ma mieć wymiary 3m $\times$ 7,5 m. W pomieszczeniu nie będzie okien, jedynie drzwi na jednej kwadratowej ścianie. Prąd do pomieszczenia ma być doprowadzony nad drzwiami, 25 cm pod sufitem, w odległości 1,5 m od obu sąsiednich ścian. Jedyne gniazdko ma natomiast być umieszczone na przeciwległej ścianie, też w odległości 1,5 m od obu sąsiednich ścian, ale 25 cm nad podłogą. Jak, chcąc zużyć jak najmniej kabla, poprowadzić go od puszki z prądem do kontaktu?

Najkrótszą drogą miedzy dwoma punktami jest odcinek łączący te punkty. Żeby zobaczyć ten odcinek musimy go narysować na siatce naszego pokoju. Popatrzmy na trzy różne siatki naszego pokoju



Wystarczy teraz w każdym przypadku policzyć odległość PK, tam, gdzie trzeba, stosując twierdzenie Pitagorasa. W pierwszym przypadku jest to 10,5 m, w drugim około 10,18, a w trzecim 10 i to jest najkrótsza droga.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Dany jest okrąg i punkty A i B należące do tego okręgu. Odcinek AB nie jest średnicą tego okręgu. Rozważmy takie trójkąty ABX, że punkt X należy do ustalonego łuku AB. Wykazać, że proste zawierające symediany wszystkich takich trójkątów, poprowadzone z wierzchołka X, przecinają się w jednym punkcie.

Ten punkt to punkt przecięcia stycznych do okręgu w punktach A i B (zobacz twierdzenie o symedianie)

2. Czworokąt ABCD jest wpisany w okrąg, punkty M i N są środkami przekątnych odpowiednio BD i AC. Wykazać, że jeśli $\measuredangle AND = \measuredangle ANB$ to $\measuredangle DMA = \measuredangle DMC$

Z twierdzenia 4 z kółka o sprzężeniu izogonalnym wynika, że prosta BD zawiera symedianę trójkąta ACD poprowadzoną z wierzchołka D (równoważność warunków 2 i 4). To z kolei oznacza, że prosta AC zawiera symedianę trójkąta DBC poprowadzoną z wierzchołka C (zobacz warunek 3 tego twierdzenia), co z kolei pociąga za sobą równość kątów $\measuredangle DMA$ i $\measuredangle DMC$ (znów równoważność warunków 2 i 4).

3. Niech $k = \frac{a}{b+c} = \frac{b}{a+c} = \frac{c}{a+b}$. Ile różnych wartości może przyjąć k?

Wyliczamy:

$$a = k(b + c)$$
$$b = k(c + a)$$
$$c = k(a + b)$$

Po dodaniu stronami dostajemy:

$$a + b + c = 2k(a + b + c)$$

Jeżeli $a + b + c = 0$ to wyliczając $a = -b - c$ dostajemy $k = \frac{a}{b+c} = \frac{-b-c}{b+c} = -1$

Jeżeli $a + b + c \neq 0$ to dzielimy obie strony przez $a + b + c$ i dostajemy $k = \frac{1}{2}$.

Liczba k może więc przyjąć dwie różne wartości.