



## Zestaw 21

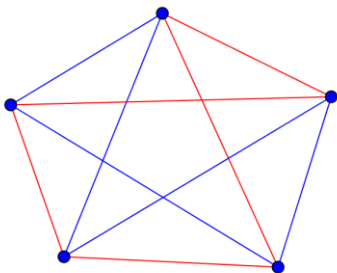
### KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Danych jest w przestrzeni  $n$  punktów, z których żadne cztery nie leżą w jednej płaszczyźnie. Każdy z nich łączymy ze wszystkimi pozostałymi używając odcinków w dwóch kolorach. Jaka jest minimalna liczba  $n$ , taka że nie można przy tym uniknąć utworzenia się trójkąta o wszystkich bokach jednakowego koloru?

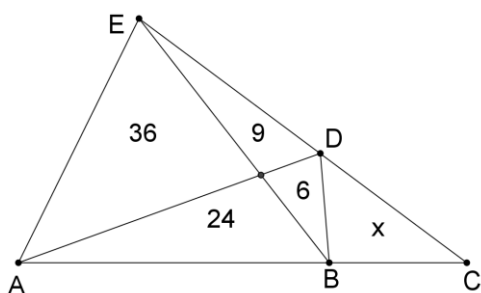
Ta liczba wynosi 6.

Weźmy 6 punktów  $A, B, C, D, E, F$  i dwa kolory: czerwony i niebieski. Punkt  $A$  połączymy z co najmniej trzema punktami (niech to będą punkty  $B, C$  i  $D$ ) jednym kolorem (niech to będzie czerwony). Jeżeli którykolwiek z odcinków  $BC, CD$  lub  $BD$  jest czerwony, to mamy czerwony trójkąt. Jeżeli wszystkie trzy są niebieskie, to mamy niebieski trójkąt  $BCD$ .

Liczba 6 jest minimalna, bo przy pięciu punktach można tak wybrać odcinki, żeby nie powstał jednokolorowy trójkąt:



2. Na rysunku tej figury podano powierzchnię czterech trójkątów. Ile wynosi powierzchnia piątego trójkąta?



Jeżeli dwa trójkąty mają taką samą wysokość, to stosunek ich pól jest równy stosunkowi ich podstaw. Niech  $[XYZ]$  oznacza pole trójkąta  $XYZ$ . Mamy:

$$\frac{[ABE]}{[BCE]} = \frac{AB}{BC}$$

$$\frac{[ABD]}{[BCD]} = \frac{AB}{BC}$$

więc

$$\frac{24 + 36}{x + 6 + 9} = \frac{24 + 6}{x}$$

Z tej proporcji wyliczamy, że pole trójkąta BCD wynosi 15.

3. Wiedząc, że  $x > 0$  i  $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$  oblicz  $x^5 + \frac{1}{x^5}$

Obliczymy najpierw  $x + \frac{1}{x}$  i  $x^3 + \frac{1}{x^3}$ .

$$7 = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 9$$

$$x + \frac{1}{x} = 3$$

bo liczba  $x$  jest dodatnia.

$$27 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3x + 3\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}$$

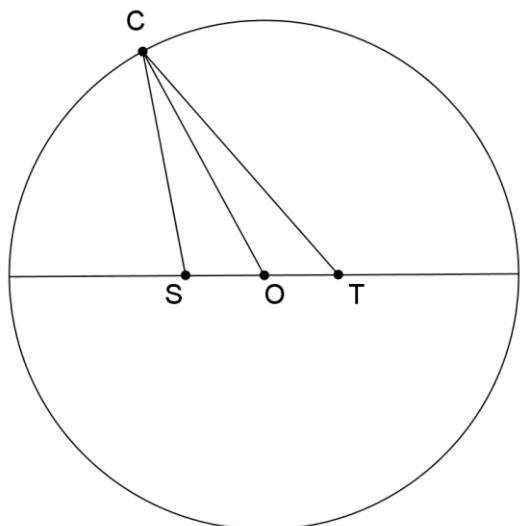
Stąd łatwo wyliczymy, że  $x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$ .

$$18 \cdot 7 = \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = x^5 + \frac{1}{x^5} + x + \frac{1}{x} = x^5 + \frac{1}{x^5} + 3$$

Statecznie dostajemy, że  $x^5 + \frac{1}{x^5} = 123$

### KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Stefania i Tomasz stoją na średnicy okrągłego placu i dzielą tę średnicę na trzy równe części. Po obrzeżu tego placu biega pies przytrzymywany na dwóch elastycznych smyczach. W pewnym momencie pies znajduje się w punkcie C oraz odległość CS wynosi 7 m, a odległość CT wynosi 9 m. Jaka jest odległość między Stefanią i Tomaszem?



Oznaczmy przez  $x$  odległość  $SO$  (wówczas promień okręgu ma długość  $3x$ ), oraz przez  $\alpha$  kąt  $SOC$ . Z twierdzenia cosinusów dostajemy:

$$49 = x^2 + 9x^2 - 2 \cdot x \cdot 3x \cdot \cos \alpha$$

$$81 = x^2 + 9x^2 - 2 \cdot x \cdot 3x \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$

czyli

$$49 = x^2 + 9x^2 - 2 \cdot x \cdot 3x \cdot \cos \alpha$$

$$81 = x^2 + 9x^2 + 2 \cdot x \cdot 3x \cdot \cos \alpha$$

Po dodaniu stronami i rozwiązaniu dostajemy  $x = \frac{\sqrt{26}}{2}$ . Odległość między Stefanią a Tomkiem wynosi więc  $\sqrt{26}$ .

2. Funkcja  $f$ , określona na zbiorze wszystkich dodatnich liczb rzeczywistych i przyjmująca wartości rzeczywiste, spełnia dla każdego  $x > 0$  warunek  $2f(x) + 3f\left(\frac{2017}{x}\right) = 5x$ . Oblicz  $f(3)$ .

Podstawmy  $\frac{2017}{x}$  w miejsce  $x$ , wówczas dostaniemy  $2f\left(\frac{2017}{x}\right) + 3f(x) = 5 \cdot \frac{2017}{x}$ .

Mamy więc układ równań:

$$\begin{cases} 2f(x) + 3f\left(\frac{2017}{x}\right) = 5x \\ 2f\left(\frac{2017}{x}\right) + 3f(x) = 5 \cdot \frac{2017}{x} \end{cases}$$

Z tego układu dostajemy  $f(x) = \frac{6051}{x} - 2x$ ,  $f(3) = 2011$ .

3. Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości odpowiednio  $a$  i  $b$ . Na pierwszej z tych przyprostokątnych wybrano punkt  $P$ , a na drugiej punkt  $Q$ . Niech  $K$  i  $H$  będą rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów  $P$  i  $Q$  na przeciwprostokątną. Jaka jest najmniejsza możliwa wartość sumy  $|KP| + |PQ| + |QH|$ ? Odpowiedź uzasadnij.

