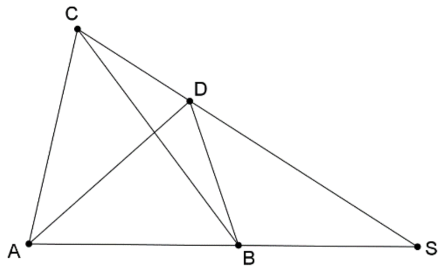
Zestaw 26

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Dane są punkty A, B, C, D, przy czym $A \neq B$ oraz $C \neq D$ (zob. rysunek). Proste AB i CD przecinają się w punkcie S. Udowodnij, że

$$\frac{[ABC]}{[ABD]} = \frac{CS}{DS}$$

gdzie $[XYZ]$ oznacza pole trójkąta XYZ.



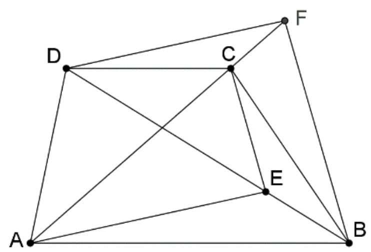
2. Niech $\max\{a, b\}$ oznacza nie mniejszą z liczb a, b, a $\min\{a, b\}$ oznacza nie większą z tych liczb. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzą równości:

a) $\max\{x, y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}$ oraz b) $\min\{x, y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}$

3. Znajdź liczbę dziewięciocyfrową utworzoną z cyfr 1, … , 9 w taki sposób, że każda z tych cyfr występuje dokładnie raz i liczba utworzona z pierwszej cyfry jest podzielna przez 1, liczba utworzona z dwóch pierwszych cyfr jest podzielna przez 2, liczba utworzona z trzech pierwszych cyfr jest podzielna przez 3 itd.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Punkt E należy do przekątnej BD. Prosta przechodząca przez punkt D i równoległa do prostej AE przecina prostą AC w punkcie F. Udowodnij, że proste BF i CE są równoległe.



2. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c spełniona jest nierówność

$$|a + b - c| + |a - b + c| + |-a + b + c| \geq |a| + |b| + |c|$$

3. Udowodnij, że jeśli daną liczbę można przedstawić w postaci sumy kwadratów trzech liczb naturalnych, to jej trzykrotność można zapisać jako sumę kwadratów czterech liczb naturalnych.

Rozwiązania należy oddać do piątku 5 kwietnia do godziny 15.10 koordynatorowi konkursu panu Jarosławowi Szczepaniakowi lub przesłać na adres jareksz@interia.pl do piątku 5 kwietnia do północy.