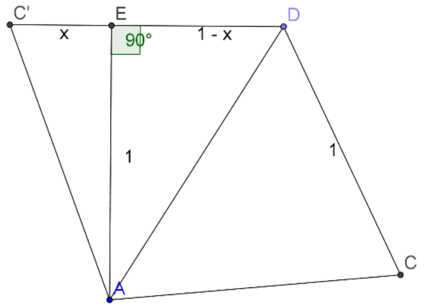
Zestaw 22

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

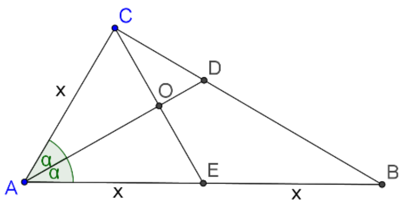
1. Oblicz pole pięciokąta wypukłego ABCDE, w którym boki AB, CD i EA mają długość 1, a suma długości boków BC i DE wynosi 1 oraz kąty ABC i DEA są proste.

Obcinamy trójkąt ABC i przyklejamy go do trójkąta ADE.



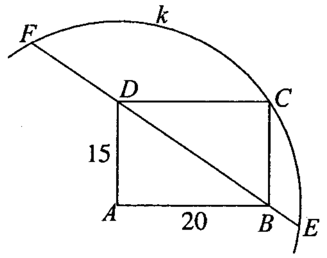
Trójkąty ACD i ADC' są przystające, bo mają bok AD wspólny, $|AC| = |AC'|$ oraz $|CD| = |DC'| = 1$. Trójkąt ADC' ma podstawę i wysokość równą 1, a więc pole równe $\frac{1}{2}$. Cały pięciokąt ma więc pole równe 1.

2. W trójkącie ABC dwusieczna AD jest prostopadła do środkowej CE. Udowodnij, że jeden z boków tego trójkąta jest dwa razy dłuższy od drugiego boku.



Trójkąty AEO i AOC są przystające z cechy kbk (kąty EAO i OAC równe bo AD jest dwusieczną, odcinek AO wspólny i kąty AOE i AOC równe jako kąty proste). Z tego wynika, że odcinki AE i AC są równe, a więc bok AB jest dwa razy dłuższy od boku AC.

3. Jeżeli ABCD jest prostokątem, k – okręgiem o środku w punkcie A, przechodzącym przez C, to jaka jest długość cięciwy EF?



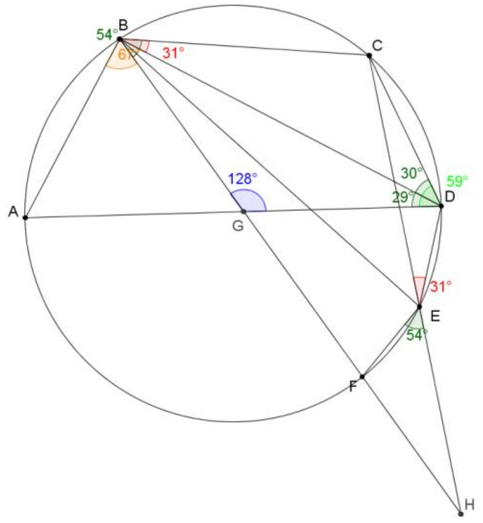
Obliczamy promień okręgu: $r = AC = BD = 25$. Trójkąt AEF jest więc trójkątem równoramiennym o ramionach równych 25. Jego wysokość opuszczona na podstawę EF jest równa wysokości trójkąta ABD opuszczonej na bok BD. Łatwo policzyć, że ma ona długość 12. Z twierdzenia Pitagorasa liczymy długość połowy podstawy EF: wynosi ona $\sqrt{481}$, czyli cięciwa EF ma długość $2\sqrt{481}$.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Punkty A, B, C, D, E, F leżą w tej kolejności, zgodnie z ruchem wskazówek zegara, na okręgu w taki sposób, że AD jest średnicą tego okręgu. Prosta BF przecina proste AD i CD odpowiednio w punktach G i H, przy czym $\measuredangle FEH = 54°$, $\measuredangle DEC = 31°$, oraz $\measuredangle DGB = 128°$. Znajdź $\measuredangle CEB$.

Ten kąt ma 30°.

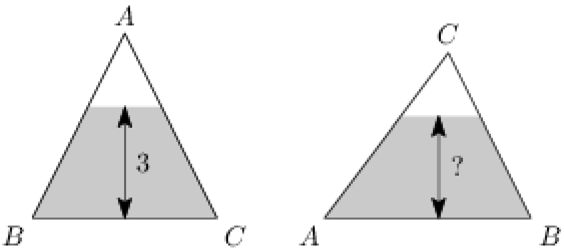
Trójkąty BCH i FEH są podobne (wykaż to), więc kąt CBH ma 54°. Kąt DBC ma tak jak kąt DEC 31°, więc kąt GBD ma 23°. Kąt ABD jest prosty, więc kąt ABG ma 67°. Łatwo teraz policzymy, że kąt ABC ma 121°. W czworokącie wpisanym w okrąg ADCB suma kątów leżących naprzeciwko wynosi 180°, więc kąt ADC ma 59°. Z trójkąta GDB wyliczymy, że kąt GDB ma 29°, stąd wniosek, że kąt BDC, a więc również kąt CEB ma 30°.



2. Osiem osób — cztery kobiety i ich mężowie — wzięło udział w N imprezach. Wiemy, że żadna para małżonków nie wzięła udziału w tej samej imprezie, a każda para nie-małżonków (włączając pary tej samej płci) wzięła razem udział w dokładnie jednej imprezie. Ponadto jedna z osób była tylko na dwóch imprezach. Jaka jest najmniejsza wartość N, dla której taka sytuacja jest możliwa?

Oznaczmy pary małżonków przez (A, a), (B, b), (C, c), (D, d). Bez straty ogólności możemy założyć, że A to osoba, która wzięła udział w dokładnie 2 imprezach oraz, że na pierwszej z nich były obecne również osoby B, C, D, a na drugiej — ich drugie połówki. Na każdej z pozostałych imprez mogły pojawić się co najwyżej dwie osoby spośród B, b, C, c, D, d, musiało zatem odbyć się jeszcze co najmniej 6 innych imprez. Faktycznie liczba N = 8 jest minimalna, bo imprezy mogły wyglądać tak: (A, B, C, D) (A, b, c, d) (B, a, c) (B, d) (C, a, d) (C, b) (D, a, b) (D, c)

3. Trójkąt ABC, w którym AB=AC=5m oraz BC=6m, jest częściowo wypełniony wodą. Gdy trójkąt leży na boku BC, poziom powierzchni wody znajduje się 3m ponad bokiem. Na jakiej wysokości w metrach znajduje się powierzchnia wody, gdy trójkąt leży na boku AB?



Niech D będzie środkiem BC, wtedy △ABD jest trójkątem prostokątnym, zatem z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy AD=4. Część trójkąta niewypełniona przez wodę jest więc trójkątem podobnym do △ABC ze skalą podobieństwa 1/4. Skoro stosunek pól (niewypełnionej części i całego trójkąta) zachowuje się po obrocie trójkąta, takie samo podobieństwo musi zachodzić również w nowej sytuacji. Zatem poziom wody leży zawsze w 3/4 wysokości, więc wystarczy obliczyć długość wysokości opuszczonej na AB. Wiedząc, że pole △ABC jest równe 12, otrzymujemy h=2·12/AB=24/5. Dochodzimy do wniosku, że wysokość powierzchni wody jest równa 3/4·24/5=18/5.