Zestaw 24

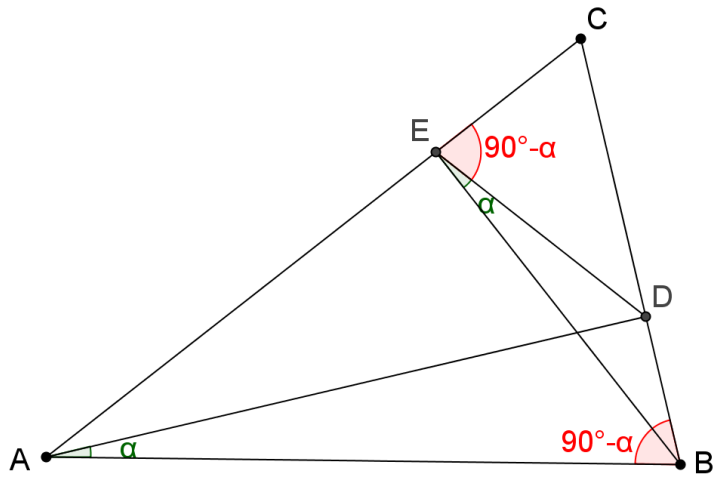
KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Udowodnij, że przedostatnia cyfra w zapisie dziesiętnym liczby $3^{33}+3^{34}+3^{35}+3^{36}$ *jest parzysta.*

$$3^{33}+3^{34}+3^{35}+3^{36}=3^{33}(1+3+9+27)=3^{33}\cdot 40$$

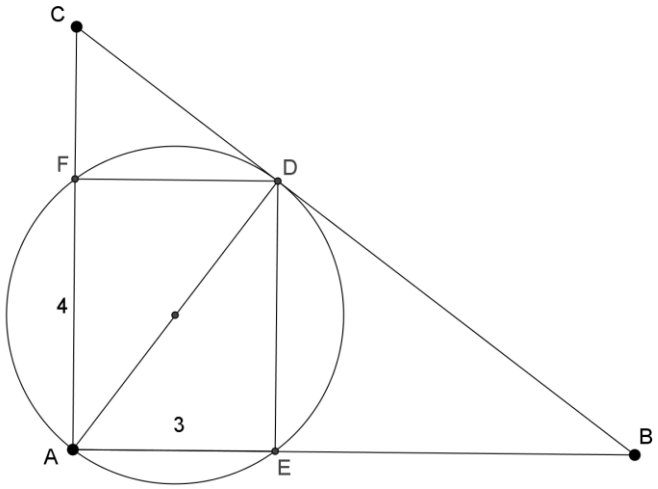
Nasza liczba jest podzielna przez 40, więc po podzieleniu przez 10 jest parzysta, to oznacza, że przedostatnia cyfra jest parzysta.

2. W trójkącie ostrokątnym ABC dane są wysokości AD i BE. Udowodnij, że trójkąt CDE jest podobny do trójkąta ABC.



Kąty ADB i AEB są równe (kąty proste), więc na czworokącie ABDE da się opisać okrąg. Kąty BAD i BED są równe (wpisane, oparte na tym samym łuku). Kąt DEC ma miarę $90°-\alpha$, bo kąt BEC jest prosty. Kąt ABD ma miarę $90°-\alpha$ z trójkąta ABD. Dwa kąty takie same wystarczą do podobieństwa.

3. W trójkącie prostokątnym ABC poprowadzono wysokość AD z wierzchołka kąta prostego. Okrąg, którego średnicą jest wysokość AD odcina na przyprostokątnych trójkąta odcinki długości 3 i 4. Oblicz pole trójkąta ABC.



Kąty AFD oraz AED są proste jako oparte na średnicy. Czworokąt AEDF jest więc prostokątem. Rachując na kątach łatwo zauważyć, że trójkąty CFD, AFD, AED, EBD są podobne. Dostajemy więc proporcje:

$\frac{3}{4} = \frac{CF}{3}$ i $\frac{4}{3} = \frac{EB}{4}$

stąd $CF = \frac{9}{4}$ i $EB = \frac{16}{3}$

Mamy już wszystko do liczenia pola. $P = \frac{625}{24}$

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Znajdź wszystkie liczby całkowite dodatnie n, dla których liczba postaci

$$1! + 2! + 3! + \cdots + n!$$

jest kwadratem liczby naturalnej.

Łatwo sprawdzić, że dla $n = 1$ i dla $n = 3$ dostajemy kwadraty liczb naturalnych. Dla $n > 3$ ostatnią cyfrą naszej sumy jest zawsze 3, a 3 nie jest ostatnią cyfrą żadnego kwadratu liczby naturalnej.

2. Dla jakich liczb całkowitych dodatnich n wartość wyrażenia $n^3 + 3^n$ jest podzielna przez 5?

Zbadajmy ostanie cyfry liczb postaci n^3 i 3^n. Dla n^3 dostaniemy cykl: 1, 8, 7, 4, 5, 6, 3, 2, 9, 0, dla 3^n dostajemy cykl 3, 9, 7, 1. Ponieważ NWW dla 10 i 4 (długości cykli) wynosi 20, więc co 20 liczb ostanie cyfry sumy $n^3 + 3^n$ będą się powtarzać. Bezpośrednim rachunkiem sprawdzimy, że podzielne przez 5 są liczby postaci $20k + 4$, $20k + 6$, $20k + 7$, $20k + 13$.

3. Znajdź wszystkie liczby całkowite dodatnie, których kwadrat jest liczbą czterocyfrową, takie, że cyfra tysięcy i setek są równe, a także cyfra dziesiątek i jedności są równe.

Mamy:

$$k^2 = 1000a + 100a + 10b + b = 11(100a + b)$$

Aby liczba $11(100a + b)$ była kwadratem liczby naturalnej liczba $100a + b$ musi być podzielna przez 11, więcej, musi być postaci $11 \cdot l^2$ dla pewnej liczby naturalnej l.

Sprawdzamy liczby $11 \cdot 16$, $11 \cdot 25$, $11 \cdot 36$, $11 \cdot 49$, $11 \cdot 64$, $11 \cdot 81$ i przekonujemy się, że $11 \cdot 84$ ma postać $100a + b$. Teraz łatwo się przekonamy, że jedyną liczbą spełniającą warunki zadania jest 88.