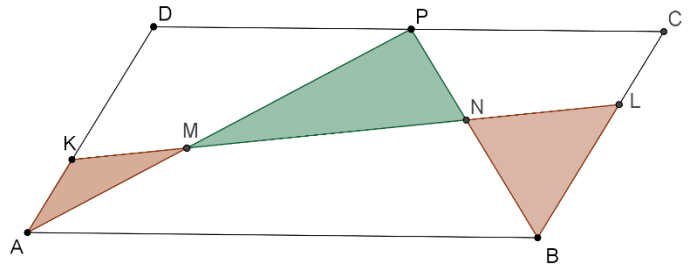
Zestaw 25

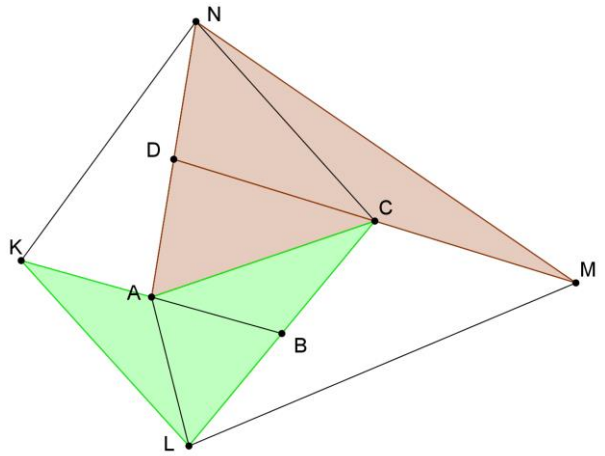
KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Punkty K i L leżą na bokach AD i BC równoległoboku $ABCD$, przy czym $AK = LC$. Punkt P leży na boku CD. Pokazać, że jeśli prosta KL przecina proste AP i BP odpowiednio w punktach M i N, to pole trójkąta PMN jest równe sumie pól trójkątów AKM i BLN.



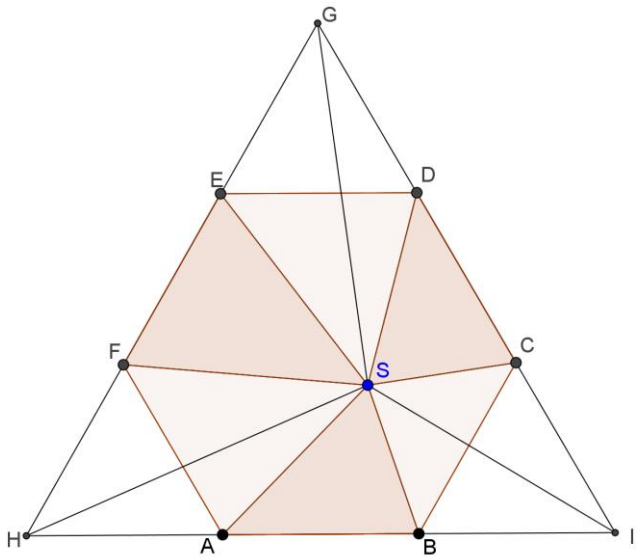
Czworokąty $ABLK$ i $KLCD$ są przystające (by się o tym przekonać, wystarczy jeden z nich przekształcić w symetrii względem punktu przecięcia przekątnych równoległoboku i zobaczyć, że nałoży się on wtedy na drugi). Mają więc równe pola i każde z tych pól jest równe połowie pola równoległoboku $ABCD$. Pole trójkąta ABP też jest równe połowie pola równoległoboku (ta sama podstawa i taka sama wysokość, jak w równoległoboku). Pole trójkąta PMN jest równe połowa pola równoległoboku minus pole czworokąta $ABNM$ i suma pól trójkątów AKM i BLN też jest równa połowa pola równoległoboku minus pole czworokąta $ABNM$.

2. Czworokąt wypukły $ABCD$ ma pole równe 1. Punkt K jest symetryczny do punktu B względem punktu A, punkt L jest symetryczny do punktu C względem punktu B, punkt M jest symetryczny do punktu D względem punktu C, punkt N jest symetryczny do punktu A względem punktu D. Oblicz pole czworokąta $KLMN$.



Poprowadźmy przekątną AC. Trójkąty brązowe mają równe pola: trójkąty ACD i DCN mają równe podstawy AD i DN oraz wspólną wysokość, trójkąty DCN i CMN mają jednakowe podstawy DC i CM oraz wspólną wysokość. Podobnie można pokazać, że trójkąty zielone mają jednakowe pola. Suma pól trójkątów DMN i LBK wynosi więc 2. Podobnie można pokazać, że suma pól trójkątów CLM i KAN wynosi 2 (teraz trzeba będzie poprowadzić przekątną BD). Ostatecznie dostajemy, że pole czworokąta $KLMN$ wynosi 5.

3. Punkt S leży wewnątrz sześciokąta foremnego $ABCDEF$. Udowodnij, że suma pól trójkątów ABS, CDS, EFS jest równa połowie pola sześciokąta $ABCDEF$.



Wpiszmy nasz sześciokąt w trójkąt równoboczny GHI, jak na rysunku. Trójkąty HAS, ABS i BIS mają równe pola (zastanów się dlaczego), więc pole trójkąta ABS stanowi $\frac{1}{3}$ pola trójkąta HIS. Podobnie pole trójkąta CDS stanowi $\frac{1}{3}$ pola trójkąta HGS i pole trójkąta EFS stanowi $\frac{1}{3}$ pola trójkąta GHS. Z tego wynika, że suma pól trójkątów ABS, CDS, EFS stanowi $\frac{1}{3}$ pola trójkąta GHI, a więc połowę pola sześciokąta, bo pole sześciokąta to $\frac{2}{3}$ pola trójkąta GHI.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Kwadrat podzielono prostymi równoległymi do jego boków na 1999^2 kwadracików. Czy można pociąć ten kwadrat wzdłuż linii podziału na 10000 prostokątów, których przekątne są równe?

Nie można.

Załóżmy dla dowodu nie wprost, że taki podział jest możliwy. Niech bok małego kwadracika będzie jednostką długości a jego pole jednostką pola. Małych kwadracików jest nieparzysta ilość, a prostokątów parzysta. Muszą więc istnieć prostokąty o polu parzystym i prostokąty o polu nieparzystym. Weźmy prostokąt o polu nieparzystym. Ma on boki a i b o długościach nieparzystych. Wówczas $a^2 + b^2$ daje resztę 2 przy dzieleniu przez 4. Weźmy prostokąt polu parzystym. Ma on boki c i d, gdzie obie te liczby są parzyste lub jedna z nich jest

parzysta, a druga nieparzysta. W pierwszym przypadku $c^2 + d^2$ jest podzielne przez 4, a w drugim daje resztę 1 przy dzieleniu przez 4. Mamy sprzeczność, bo gdyby wszystkie przekątne były równe to suma kwadratów długości boków prostokątów musiałby być równa.

2. Rozwiąż w liczbach całkowitych równanie $x^2 - 7y = 10$

Nasze równanie możemy zapisać w postaci $x^2 - 10 = 7y$. Prawa strona jest podzielna przez 7. Żeby lewa strona była podzielna przez 7, liczba x^2 musiałaby dawać resztę 3 z dzielenia przez 7. Sprawdzając po kolei liczby postaci $7k, 7k + 1, \dots, 7k + 6$ stwierdzamy, że jest to niemożliwe. Nasze równanie nie ma więc rozwiązań.

3. Rozwiąż równanie

$$\left[\frac{5 + 6x}{8}\right] = \frac{15x - 7}{5}$$

gdzie $[a]$ oznacza cechę liczby a, czyli największą liczbę całkowitą mniejszą lub równą a.

Liczba $\frac{15x-7}{5}$ jest całkowita. Oznaczmy $\frac{15x-7}{5} = k$. Wówczas $x = \frac{5k+7}{15}$. Nasze równanie możemy więc zapisać tak:

$$\left[\frac{5 + 6 \cdot \frac{5k + 7}{15}}{8}\right] = k$$

co jest równoważne układowi nierówności

$$\frac{5 + 6 \cdot \frac{5k + 7}{15}}{8} \geq k$$
$$\frac{5 + 6 \cdot \frac{5k + 7}{15}}{8} < k + 1$$

Wśród liczb całkowitych układ ten spełniają liczby 0 i 1. Korzystając z równości $x = \frac{5k+7}{15}$ dostajemy dwa rozwiązania: $x = \frac{7}{15}$ lub $x = \frac{4}{5}$.