Zestaw 29

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Na tablicy zapisujemy liczby od 1 do 10. Ścieramy dwie liczby i w ich miejsce wpisujemy ich sumę pomniejszoną o 1. Wykonujemy tę operację tyle razy, aż na tablicy zostanie tylko jedna liczba. Udowodnij, że niezależnie od tego, jak będziemy ścierać liczby, na końcu zawsze otrzymamy tę samą liczbę i podaj, co to za liczba.

2. Dany jest okrąg O_1 o środku S oraz okrąg O_2, przechodzący przez S i przecinający okrąg O_1 w punktach A i B. Z punktu A poprowadzono prostą, przecinającą okrąg O_1 w punkcie C, a okrąg O_2 w punkcie D. Udowodnij, że trójkąt BCD jest równoramienny.

3. O liczbach a, b, c, d wiadomo, że spełniają układ równań:

$$\begin{cases} a+b+c+d = 101 \\ ab+cd = 200 \end{cases}$$

Udowodnij, że dokładnie jedna z tych liczb jest nieparzysta.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości odpowiednio a i b. Na pierwszej z tych przyprostokątnych wybrano punkt P, a na drugiej punkt Q. Niech K i H będą rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów P i Q na przeciwprostokątną. Jaka jest najmniejsza możliwa wartość sumy $|KP| + |PQ| + |QH|$? Odpowiedź uzasadnij.

2. Mamy 17 liczb rzeczywistych. Wiadomo, że suma dowolnych dziewięciu spośród tych liczb jest większa od sumy pozostałych ośmiu. Wykaż, że wszystkie te liczby są dodatnie.

3. Wyznacz wszystkie liczby całkowite nieujemne n, dla których liczba $7^n + 2 \cdot 4^n$ jest liczbą pierwszą.

Rozwiązania należy oddać do piątku 26 kwietnia do godziny 15.10 koordynatorowi konkursu panu Jarosławowi Szczepaniakowi lub przesłać na adres jareksz@interia.pl do piątku 26 kwietnia do północy.