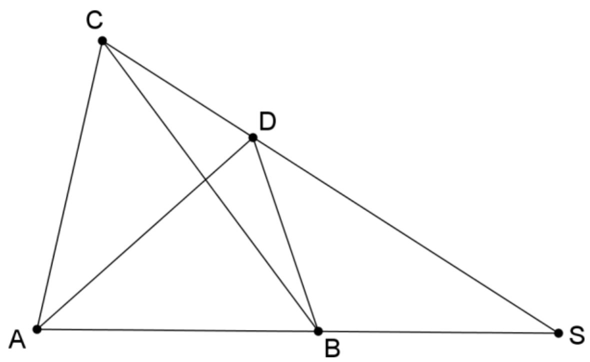
Zestaw 26

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Dane są punkty A, B, C, D, przy czym $A \neq B$ oraz $C \neq D$ (zob. rysunek). Proste AB i CD przecinają się w punkcie S. Udowodnij, że

$$\frac{[ABC]}{[ABD]} = \frac{CS}{DS}$$

gdzie $[XYZ]$ oznacza pole trójkąta XYZ.



Wykorzystamy fakt, że stosunek pól trójkątów o wspólnej wysokości jest równy stosunkowi podstaw. Oznaczmy $CS = x, DS = y$. Mamy więc:
$\frac{[CAS]}{[DAS]} = \frac{x}{y}$ oraz $\frac{[CBS]}{[DBS]} = \frac{x}{y}$

Mnożymy na krzyż:
$[CAS] \cdot y = [DAS] \cdot x$ oraz $[CBS] \cdot y = [DBS] \cdot x$

Odejmujemy stronami:

$$[CAS] \cdot y - [CBS] \cdot y = [DAS] \cdot x - [DBS] \cdot x$$
$$y([CAS] - [CBS]) = x([DAS] - [DBS])$$
$$\frac{[CAS] - [CBS]}{[DAS] - [DBS]} = \frac{x}{y}$$

Ostatecznie dostajemy:

$$\frac{[ABC]}{[ABD]} = \frac{[CAS] - [CBS]}{[DAS] - [DBS]} = \frac{x}{y}$$

2. Niech $max\{a, b\}$ oznacza nie mniejszą z liczb a, b, a $min\{a, b\}$ oznacza nie większą z tych liczb. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych x, y zachodzą równości:

a) $max\{x, y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}$ *oraz* *b)* $min\{x, y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}$

Jeśli $x = y$, to $|x - y| = 0$ i w obydwu przypadkach dostajemy wspólną wartość x i y.

Załóżmy, że $x > y$. Wówczas $\max\{x, y\} = x$. Z drugiej strony $\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y+x-y}{2} = \frac{2x}{2} = x$

$\min\{x, y\} = y$. Z drugiej strony $\frac{x+y-|x-y|}{2} = \frac{x+y-x+y}{2} = \frac{2y}{2} = y$

Załóżmy z kolei, że $y > x$. Wówczas $\max\{x, y\} = y$. Z drugiej strony $\frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{x+y-x+y}{2} = \frac{2y}{2} = y$

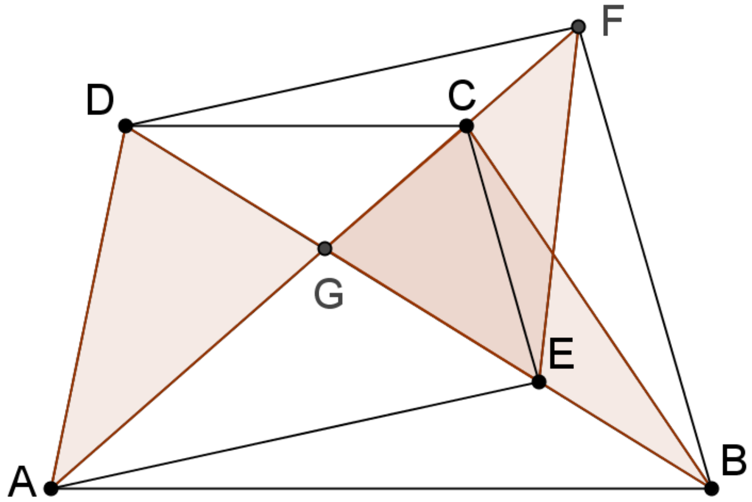
$\min\{x, y\} = x$. Z drugiej strony $\frac{x+y-|x-y|}{2} = \frac{x+y+x-y}{2} = \frac{2x}{2} = x$

3. Znajdź liczbę dziewięciocyfrową utworzoną z cyfr 1, … , 9 w taki sposób, że każda z tych cyfr występuje dokładnie raz i liczba utworzona z pierwszej cyfry jest podzielna przez 1, liczba utworzona z dwóch pierwszych cyfr jest podzielna przez 2, liczba utworzona z trzech pierwszych cyfr jest podzielna przez 3 itd.

Ta liczba to 381654729

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach AB i CD. Punkt E należy do przekątnej BD. Prosta przechodząca przez punkt D i równoległa do prostej AE przecina prostą AC w punkcie F. Udowodnij, że proste BF i CE są równoległe.



Oznaczmy przez $[XYZ]$ pole trójkąta XYZ.

$ABCD$ jest trapezem, więc $[AGD] = [GBC]$. $AEFD$ jest trapezem, więc $[AGD] = [GEF]$. Stąd wynika, że $[GBC] = [GEF]$. Stąd łatwo udowodnisz, że $[CEF] = [CEB]$. Trójkąty CEF i CEB mają więc jednakowe wysokości, a to implikuje równoległość prostych BF i CE.

2. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c spełniona jest nierówność

$$|a+b-c|+|a-b+c|+|-a+b+c| \geq |a|+|b|+|c|$$

Skorzystamy z faktu, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y $|x|+|y| \geq |x+y|$

$$|a+b-c|+|a-b+c| \geq |a+b-c+a-b+c| = 2|a|$$
$$|a-b+c|+|-a+b+c| \geq |a-b+c-a+b+c| = 2|c|$$
$$|a+b-c|+|-a+b+c| \geq |a+b-c-a+b+c| = 2|b|$$

Po dodaniu stronami i podzieleniu przez 2 dostajemy tezę.

3. Udowodnij, że jeśli daną liczbę można przedstawić w postaci sumy kwadratów trzech liczb całkowitych, to jej trzykrotność można zapisać jako sumę kwadratów czterech liczb całkowitych.

$$x = a^2+b^2+c^2$$
$$3x = 3a^2+3b^2+3c^2 = (a+b+c)^2+(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2$$