Zestaw 27

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

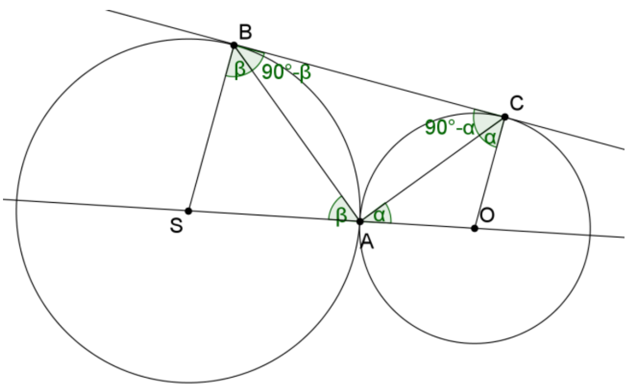
1. W pewnym kraju jest skończona liczba miast, które połączono siecią dróg jednokierunkowych. Wiadomo, że każde dwa miasta łączy pewna droga jednokierunkowa. Udowodnij, że istnieje miasto, z którego można odbyć podróż do każdego innego miasta.

Wybieramy miasto A, z którego wychodzi najwięcej bezpośrednich dróg do innych miast. Niech S będzie zbiorem wszystkich miast, do których można dojechać z miasta A bezpośrednią drogą. Jeśli każde miasto (oprócz A) należy do zbioru S, to A jest szukanym miastem. W przeciwnym razie bierzemy dowolne miasto $B \notin S$. Oczywiście z miasta B wychodzi bezpośrednia droga do miasta A. Pokażemy, że w zbiorze S istnieje miasto C, z którego prowadzi bezpośrednia droga do B (a więc z miasta A można dojechać do B przez miasto C). Gdyby bowiem tak nie było, to z miasta B prowadziłaby bezpośrednia droga do każdego miasta ze zbioru S oraz do miasta A, czyli co najmniej o jedną drogę więcej niż z miasta A. To jednak przeczy temu, że z miasta A wychodzi najwięcej dróg. Ta sprzeczność kończy dowód twierdzenia.

2. Znajdź wszystkie takie liczby pierwsze p, że $4p^2+1$ i $6p^2+1$ są również liczbami pierwszymi.

Jedyną taką liczbą jest 5. W pozostałych przypadkach jedna z liczb $4p^2+1$ lub $6p^2+1$ jest podzielna przez 5, co łatwo udowodnisz na przykład badając ostatnie cyfry tych liczb.

3. Dane są dwa okręgi styczne zewnętrznie w punkcie A oraz prosta styczna do obu okręgów odpowiednio w punktach B i C. Wykaż, że trójkąt ABC jest prostokątny.



Kąt BAC ma miarę $180° - (90° - \alpha) - (90° - \beta) = \alpha + \beta$ (z trójkąta ABC). Ponieważ $2\alpha + 2\beta = 180°$, więc $\alpha + \beta$ jest kątem prostym.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Na płaszczyźnie danych jest n punktów. Każde trzy punkty są wierzchołkami trójkąta o polu ≤ 1. Udowodnij, że wszystkie punkty leżą w pewnym trójkącie o polu $\leq\ 4$.

Rozważamy wszystkie trójkąty, których wierzchołkami są trzy z rozważanych n punktów. Oczywiście istnieje skończenie wiele takich trójkątów (z pewnością jest ich mniej niż n^3). Zatem wśród tych trójkątów istnieje trójkąt o największym polu. Niech trójkąt ABC ma zatem największe pole (jeśli istnieje kilka trójkątów o tym samym największym polu, to wybieramy którykolwiek z nich). Oznaczmy pole trójkąta XYZ przez [XYZ] Oczywiście [ABC] $\leq\ 1$.
Przez wierzchołek C prowadzimy prostą m równoległą do prostej AB. Wtedy wszystkie punkty rozważanego zbioru leżą po tej samej stronie prostej m, co punkty A i B (z włączeniem prostej m). Przypuśćmy bowiem, że pewien punkt D leży po przeciwnej stronie prostej m. Wówczas [ABD] > [ABC], gdyż trójkąty ABC i ABD mają wspólną podstawę AB, ale wysokość trójkąta ABD jest większa od wysokości trójkąta ABC. To jednak jest sprzeczne z wyborem trójkąta ABC, którego pole miało być największe. Poprowadźmy teraz prostą k przechodzącą przez wierzchołek A i równoległą do prostej BC oraz prostą l przechodzącą przez wierzchołek B i równoległą do prostej AC. Punkty przecięcia prostych k, l i m są wierzchołkami trójkąta KLM.
Tak jak wyżej dowodzimy, że wszystkie rozważane punkty leżą po tej stronie prostej k co punkty B i C oraz po tej samej stronie prostej l co punkty A i C (z włączeniem tych prostych). Inaczej mówiąc, wszystkie te punkty leżą w trójkącie KLM (w jego wnętrzu lub na brzegu). Do zakończenia rozwiązania wystarczy zauważyć, że

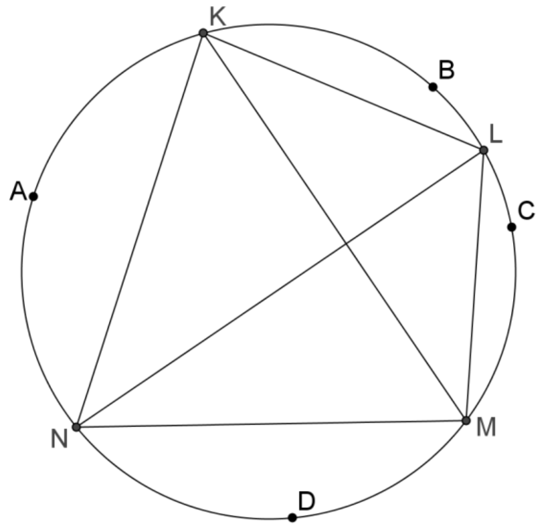
$$\triangle ABC\ \equiv \triangle KBC\ \equiv \triangle CAL\ \equiv \triangle BMA,$$

skąd wynika, że $[KLM]\ =\ 4\ \cdot\ [ABC]\ \leq\ 4.$

2. Znajdź wszystkie takie liczby pierwsze p, że $8p^2+1$ jest również liczbą pierwszą.

Jedyną taką liczbą jest 3. W pozostałych przypadkach liczba $8p^2+1$ jest podzielna przez 3, co łatwo stwierdzisz badając reszty z dzielenia przez 3.

3. Na okręgu wybrano cztery kolejne punkty A, B, C, D. Środki łuków AB, BC, CD i DA oznaczono odpowiednio jako K, L, M, N. Udowodnij, że pole czworokąta KLMN równe jest połowie iloczynu długości jego przekątnych.



Wystarczy wykazać, że nasz czworokąt ma prostopadłe przekątne (dlaczego?). Pokażemy, że suma kątów KML i NLM wynosi $90°$. Jest tak, ponieważ suma łuków KBL i MDN daje półkole.