Zestaw 28

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Udowodnij, że każdą liczbę całkowitą podzielną przez 4 można przedstawić w postaci różnicy kwadratów dwóch liczb całkowitych.

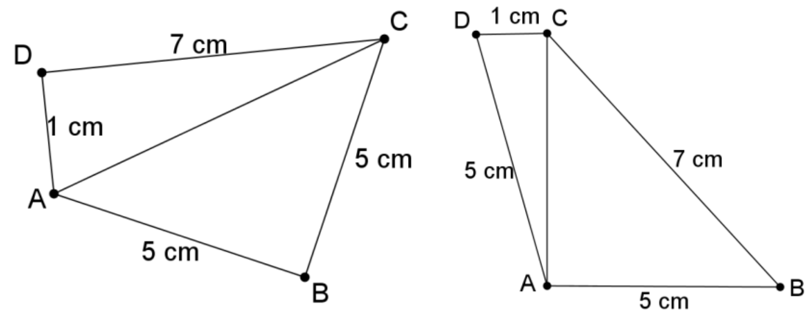
Liczbę $4k$ można przedstawić w postaci różnicy kwadratów liczb $k+1$ i $k-1$.

$$(k+1)^2-(k-1)^2=k^2+2k+1-k^2+2k-1=4k$$

2. Niech $\overline{ABCDEF}$ będzie liczbą sześciocyfrową taką, że $A+D=B+E=C+F=9$. Udowodnij, że liczba $\overline{ABCDEF}$ jest podzielna przez 37

$$\begin{aligned}\overline{ABCDEF}&=A\cdot 10^5+B\cdot 10^4+C\cdot 10^3+(9-A)\cdot 10^2+(9-B)\cdot 10+(9-C)\\&=A\cdot 10^5+B\cdot 10^4+C\cdot 10^3+900-A\cdot 10^2+90-B\cdot 10+9-C\\&=10^2(A\cdot 10^3-A)+10(B\cdot 10^3-B)+(C\cdot 10^3-C)+999\\&=10^2\cdot 999A+10\cdot 999B+999C+999=999\cdot(100A+10B+C+1)\\&=37\cdot 27\cdot(100A+10B+C+1)\end{aligned}$$

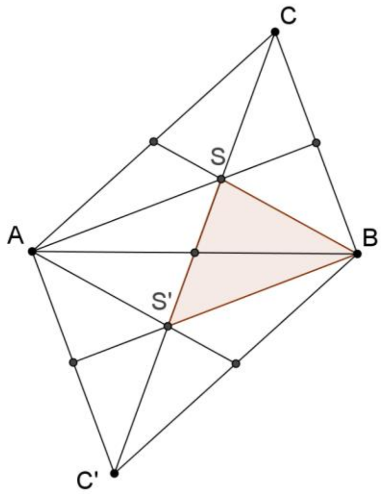
3. Jakie maksymalne pole może mieć czworokąt o bokach długości 1 cm, 5 cm, 5 cm, 7 cm?



Podzielmy czworokąt ABCD przekątną na dwa trójkąty. Pola tych trójkątów będą największe, gdy będą to trójkąty prostokątne (przykładowo trójkąt o bokach 7 i 1 może mieć największą wysokość poprowadzoną na bok długości 7 długą na 1 i dzieje się tak, gdy jest to trójkąt prostokątny). Możliwe są dwie sytuacje: kąty proste są między bokami lub kąty proste są między bokiem a przekątną (zobacz rysunek powyżej). W pierwszej sytuacji przekątna ma długość $5\sqrt{2}$ cm, a w drugiej $2\sqrt{6}$. W pierwszej sytuacji pole jest większe i wynosi 16.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Udowodnij, że ze środkowych dowolnego trójkąta zawsze można zbudować trójkąt i że pole tego trójkąta jest równe $\frac{3}{4}$ pola wyjściowego trójkąta.



Skonstruujemy trójkąt z środkowych trójkąta ABC. Odbijamy trójkąt ABC w symetrii względem środka odcinka AB. S jest środkiem ciężkości trójkąta ABC, a S' środkiem ciężkości trójkąta ABC'. Każdy bok trójkąta S'BS ma długość równą $\frac{2}{3}$ długości pewnej środkowej trójkąta ABC. Wystarczy teraz trójkąt S'BS powiększyć w skali $\frac{3}{2}$.

Aby obliczyć pole trójkąta utworzonego ze środkowych skorzystamy ze znanego faktu, że środkowe dzielą trójkąt na sześć trójkątów o jednakowym polu. Pole trójkąta S'BS stanowi więc $\frac{1}{3}$ pola trójkąta ABC. Po powiększeniu w skali $\frac{3}{2}$ pole zwiększy się $\frac{9}{4}$ raza i wyniesie $\frac{3}{4}$ pola trójkąta ABC.

2. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p i q takie, że $p^2 - 6q^2 = 1$.

Łatwo zauważyć, że $p \neq 2$, jest więc liczbą nieparzystą. Podstawmy $p = 2n + 1$

$$(2n+1)^2 - 1 = 6q^2$$
$$4n^2 + 4n = 6q^2$$

Lewa strona jest podzielna przez 4, żeby prawa była podzielna przez 4, q musi się równać 2. Jedynym rozwiązaniem jest więc $p = 5$, $q = 2$.

3. Rozwiąż równanie $\sqrt[3]{9-x} + \sqrt[3]{x} = 3$

Dziedziną jest przedział $\langle 0, 9\rangle$. Podnieśmy obydwie strony do trzeciej potęgi.

$$9 - x + 3\sqrt[3]{(9-x)^2x} + 3\sqrt[3]{(9-x)x^2} = 27$$
$$3\sqrt[3]{(9-x)^2x} + 3\sqrt[3]{(9-x)x^2} = 18$$
$$\sqrt[3]{(9-x)^2x} + \sqrt[3]{(9-x)x^2} = 6$$
$$\sqrt[3]{(9-x)x} \cdot \left(\sqrt[3]{9-x} + \sqrt[3]{x}\right) = 6$$

Teraz w miejsce $\sqrt[3]{9-x} + \sqrt[3]{x}$ możemy wpisać 3 (patrz równanie wyjściowe) i dostajemy

$$\sqrt[3]{(9-x)x} \cdot 3 = 6$$

$$\sqrt[3]{(9-x)x} = 2$$
$$(9-x)x = 8$$

Dostaliśmy równanie kwadratowe, którego rozwiązaniami są liczby 1 i 8. Obydwie należą do dziedziny.