## Zestaw 29

### KLASY PIERWSZE I DRUGIE

*1. Na tablicy zapisujemy liczby od 1 do 10. Ścieramy dwie liczby i w ich miejsce wpisujemy ich sumę pomniejszoną o 1. Wykonujemy tę operację tyle razy, aż na tablicy zostanie tylko jedna liczba. Udowodnij, że niezależnie od tego, jak będziemy ścierać liczby, na końcu zawsze otrzymamy tę samą liczbę i podaj, co to za liczba.*

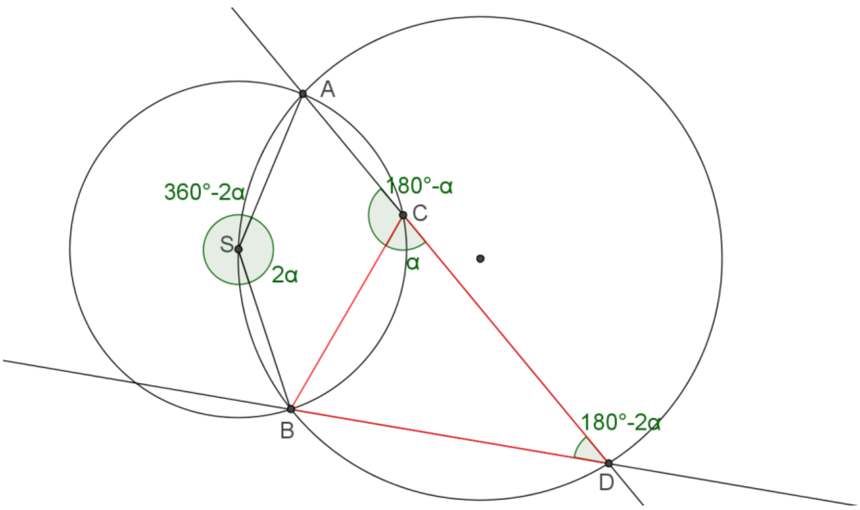
Na początku suma wszystkich zapisanych liczb wynosi 55. Po każdym wykonaniu naszej operacji suma ta zmniejsza się o 1. Operację wykonujemy 9 razy (po każdym wykonaniu ilość liczb na tablicy zmniejsza się o 1), więc nasza suma zmniejszy się o 9 i zawsze wyniesie 46.

*2. Dany jest okrąg $O_1$ o środku $S$ oraz okrąg $O_2$, przechodzący przez $S$ i przecinający okrąg $O_1$ w punktach $A$ i $B$. Z punktu $A$ poprowadzono prostą, przecinającą okrąg $O_1$ w punkcie $C$, a okrąg $O_2$ w punkcie $D$. Udowodnij, że trójkąt $BCD$ jest równoramienny.*

Najlepiej rozwiązać to zadanie korzystając z twierdzeń o kątach w kole oraz z twierdzenia o czworokącie wpisanym w okrąg.

Możliwe są 3 przypadki.

1 przypadek:

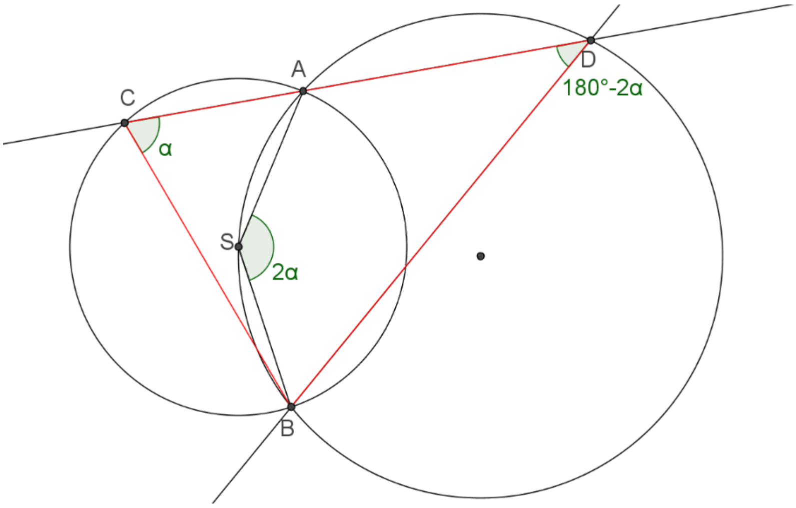



Oznaczmy przez $\alpha$ kąt $BCD$. Wówczas kąt $BCA$ ma miarę $180^\circ - \alpha$. Kąt wklęsły $ASB$ jako środkowy oparty na tym samym łuku, co $BCA$ ma miarę $2\alpha$. Czworokąt $BDAS$ jest wpisany w okrąg, więc kąt $BDA$ (a tym samym $BDC$) ma miarę $180^\circ - 2\alpha$. Pozostaje wyliczyć miarę kąta $CBD$:

$$CBD = 180^\circ - \alpha - (180^\circ - 2\alpha) = \alpha$$

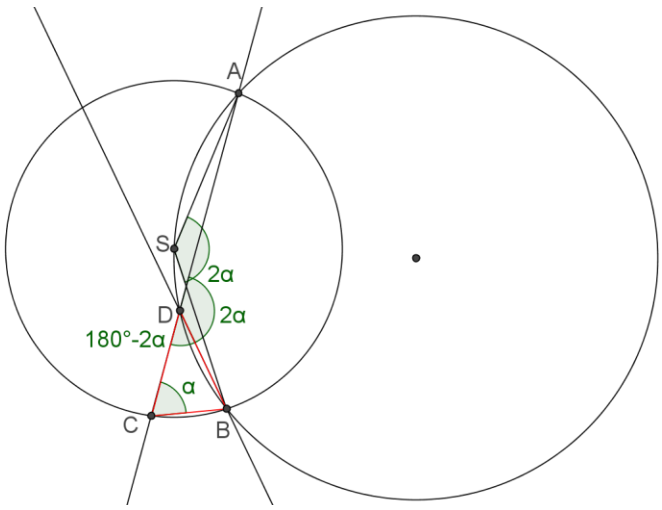
Trójkąt $BCD$ ma więc dwa kąty o mierze $\alpha$, czyli jest równoramienny.

2 przypadek:




Oznaczmy przez $\alpha$ kąt $BCD$. Kąt $BSA$ jako środkowy oparty na tym samym łuku ma miarę $2\alpha$. Czworokąt $BDAS$ jest wpisany w okrąg, więc kąt $BDA$ (a tym samym $BDC$) ma miarę $180^{\circ} - 2\alpha$. Jak w przypadku 1 wyliczamy miarę kąta $CBD$ i znów wychodzi nam $\alpha$.

Przypadek 3.




Znów oznaczmy przez $\alpha$ kąt $BCD$. Kąt $BSA$ jako środkowy oparty na tym samym łuku ma miarę $2\alpha$. Kąt $ADB$ jest w prawym okręgu oparty na tym samym łuku, co kąt $BSA$, więc też ma miarę $2\alpha$. Kąt $CDB$, jako do niego przyległy, ma miarę $180^{\circ} - 2\alpha$. Wyliczamy miarę kąta $CBD$ i znów wychodzi nam $\alpha$.

*3. O liczbach $a, b, c, d$ wiadomo, że spełniają układ równań:*

$$\begin{cases} a + b + c + d = 101 \\ ab + cd = 200 \end{cases}$$

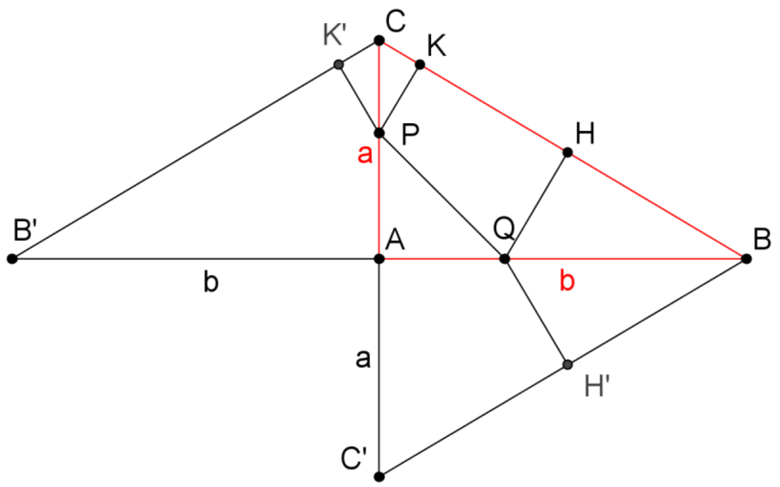
*Udowodnij, że dokładnie jedna z tych liczb jest nieparzysta.*

Gdyby wśród liczb $a, b, c, d$ były same parzyste, same nieparzyste lub dwie parzyste i dwie nieparzyste, to pierwsze równanie byłoby sprzeczne, bo miałoby po lewej stronie liczbę parzystą, a po prawej nieparzystą. Gdyby z kolei były trzy nieparzyste, to drugie równanie byłoby sprzeczne, bo po lewej stronie byłaby liczba nieparzysta, a po prawej parzysta.

Jedynie, gdy wśród tych liczb jest dokładnie jedna nieparzysta, układ równań nie jest sprzeczny.

## KLASY TRZECIE I CZWARTE

*1. Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości odpowiednio $a$ i $b$. Na pierwszej z tych przyprostokątnych wybrano punkt $P$, a na drugiej punkt $Q$. Niech $K$ i $H$ będą rzutami prostokątnymi odpowiednio punktów $P$ i $Q$ na przeciwprostokątną. Jaka jest najmniejsza możliwa wartość sumy $|KP| + |PQ| + |QH|$? Odpowiedź uzasadnij.*




Wykażemy, że najmniejsza możliwa wartość interesującej nas sumy wynosi $\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Oznaczmy wierzchołki naszego trójkąta przez $A, B, C$, jak na rysunku powyżej. Przekształćmy trójkąt $ABC$ w symetrii względem prostej $AB$ i oznaczmy przez $H'$ obraz punktu $H$, oraz w symetrii względem prostej $AC$ i oznaczmy przez $K'$ obraz punktu $K$. Wówczas $|KP| + |PQ| + |QH| = |K'P| + |PQ| + |QH'|$. Długość łamanej $K'PQH'$ jest większa lub równa od odległości między odcinkami $B'C$ i $C'B$ (które oczywiście są równoległe), a ta odległość jest równa podwojonej wysokości trójkąta ABC opuszczonej na przeciwprostokątną czyli $\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

*2. Mamy 17 liczb rzeczywistych. Wiadomo, że suma dowolnych dziewięciu spośród tych liczb jest większa od sumy pozostałych ośmiu. Wykaż, że wszystkie te liczby są dodatnie.*

Oznaczmy nasze liczby przez $a_1, a_2, \dots, a_{17}$. Z warunków zadania wynika, że:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 > a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16} + a_{17}$$

oraz

$$a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16} + a_{17} > a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8$$

Dodając te nierówności stronami i redukując wyrazy podobne dostajemy:

$$2a_9 > 0$$

czyli

$$a_9 > 0$$

W podobny sposób pokażemy, że wszystkie pozostałe liczby są większe od 0.

*3. Wyznacz wszystkie liczby całkowite nieujemne* $n$*, dla których liczba* $7^n + 2 \cdot 4^n$ *jest liczbą pierwszą.*

Dla $n = 0$ otrzymujemy liczbę pierwszą 3. Dla $n > 0$ otrzymujemy liczbę większą od 3 i podzielną przez 3, bo zarówno wszystkie naturalne potęgi siódemki, jak i wszystkie naturalne potęgi czwórki przystają do 1 modulo 3. Jedynym rozwiązaniem jest więc $n = 0$.