Zestaw 30

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Liczby a, b, c są dodatnie. Wykaż, że:

$$\frac{a}{a+1}+\frac{b}{(a+1)(b+1)}+\frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)}<1$$

Sprowadzamy do wspólnego mianownika:

$$\frac{a(b+1)(c+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}+\frac{b(c+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(a+1)(b+1)(c+1)}<1$$

Wykonujemy działania po lewej stronie:

$$\frac{abc+ab+bc+ac+a+b+c}{abc+ab+bc+ac+a+b+c+1}<1$$

Mianownik jest o 1 większy od licznika, więc istotnie lewa strona jest mniejsza od 1

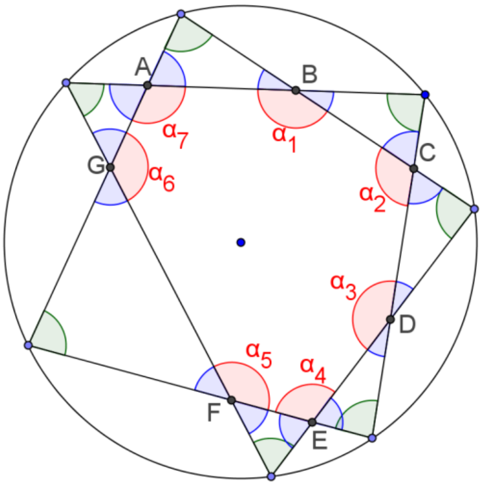
2. Ile dzielników ma liczba $2^2\cdot 3^5+2\cdot 3^6+2^3\cdot 3^7$?

Wyłączamy 3^5 przed nawias i przedstawiamy naszą liczbę w postaci iloczynu liczb pierwszych:

$$3^5(2^2+2\cdot 3+2^3\cdot 3^2)=3^5\cdot 82=2\cdot 3^5\cdot 41$$

Aby policzyć dzielniki zauważamy, że każdy dzielnik naszej liczby ma w rozkładzie na czynniki pierwsze liczbę 2 w potędze 0 lub 1 (a więc na dwa sposoby), liczbę 3 w potęgach od 0 do 5 (więc na sześć sposobów) i 41 w potędze 0 lub 1 (na dwa sposoby). W sumie możliwości utworzenia dzielników naszej liczby jest $2\cdot 6\cdot 2$ czyli 24.

3. Oblicz sumę siedmiu zaznaczonych kątów:



Popatrzmy na siedmiokąt ABCDEFG. Suma jego kątów $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_7 = 5 \cdot 180° = 900°$ (siedmiokąt można odcinkami wychodzącymi z jednego wierzchołka podzielić na 5 trójkątów). Kąty niebieskie, to kąty przyległe do kątów czerwonych. Ich suma wynosi:

$$2 \cdot (180° - \alpha_1) + 2 \cdot (180° - \alpha_2) + .. + 2 \cdot (180° - \alpha_7) = 2520° - 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_7) = 2520° - 1800° = 720°$$

Sumę kątów zielonych policzymy korzystając z sumy kątów w trójkątach na zewnątrz siedmiokąta ABCDEFG:

$$7 \cdot 180° - 720° = 540°$$

Ciekawostką jest fakt, że nie tylko w siedmiokącie, ale w każdym wielokącie wypukłym suma kątów przyległych do kątów wewnętrznych (nazywamy je kątami zewnętrznymi) wynosi 720°. Możecie spróbować ten fakt udowodnić.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Uzasadnij, że dowolnej liczby naturalnej n:

$$(n+1)(n+2)(n+3) \cdot \ldots \cdot 2n = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$$

Rozwiązanie 1.

Przeprowadzimy dowód indukcyjny.

Dla $n = 1$ lewa strona równa się 2 i prawa też 2.

Założenie indukcyjne:

$$(n+1)(n+2)(n+3) \cdot \ldots \cdot 2n = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$$

Teza indukcyjna:

$$(n+2)(n+3)(n+4) \cdot \ldots \cdot 2n \cdot (2n+1) \cdot 2(n+1) = 2^{n+1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)$$

Policzmy wartość wyrażenia $(n+2)(n+3)(n+4) \cdot \ldots \cdot 2n \cdot (2n+1) \cdot 2(n+1)$.

Z założenia indukcyjnego:

$$(n+2)(n+3) \cdot \ldots \cdot 2n = \frac{2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{(n+1)}$$

Mamy więc:

$$(n+2)(n+3)(n+4) \cdot \ldots \cdot 2n \cdot (2n+1) \cdot 2(n+1) = \frac{2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{(n+1)} \cdot (2n+1) \cdot 2(n+1) = 2^{n+1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)$$

Rozwiązanie 2

Wyrażenie $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$ możemy zapisać tak:

$$1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots\cdot(2n-1)=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot 2n}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}$$
$$=\frac{\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\cdot(n+1)\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot 2n}{2^n\cancel{(1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n)}}$$
$$=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot 2n}{2^n}$$

To, co otrzymaliśmy wstawiamy do prawej strony naszej równości:

$$2^n\cdot\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot 2n}{2^n}=(n+1)(n+2)(n+3)\cdot\ldots\cdot 2n$$

i otrzymaliśmy lewą stronę, więc równość jest udowodniona.

2. Wiadomo, że liczba a jest n razy większa od liczby b, a suma liczb a i b jest m razy większa od ich różnicy. Znaleźć sumę $m+n$, wiedząc, że m i n należą do liczb naturalnych.

$$a=nb$$
$$nb+b=m(nb-b)$$
$$nb+b=mnb-mb$$
$$n+1=mn-m$$
$$mn-m-n-1=0$$
$$m(n-1)-(n-1)=2$$
$$(m-1)(n-1)=2$$

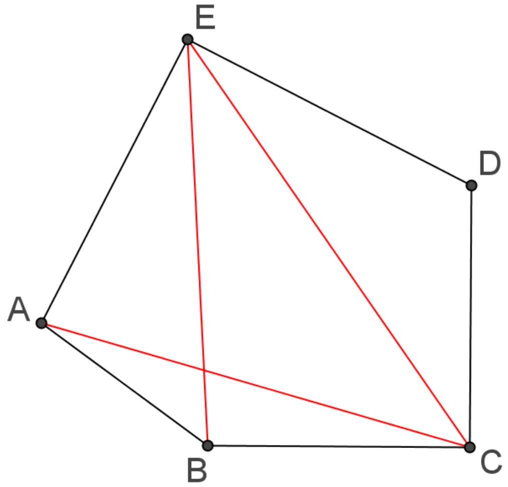
Mamy więc:

$\begin{cases} m-1=1 \\ n-1=2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} m-1=2 \\ n-1=1 \end{cases}$

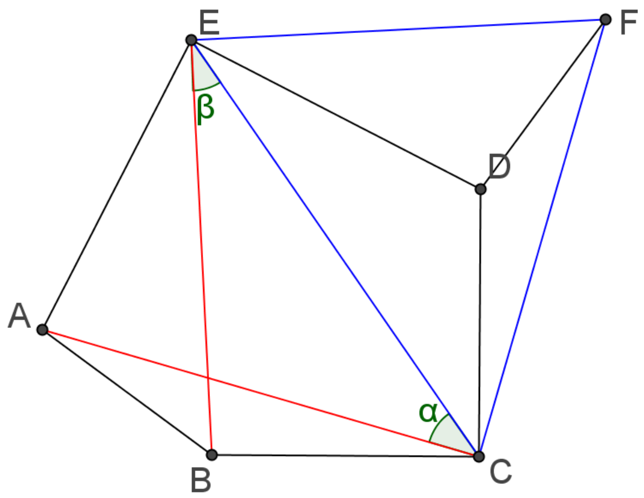
Wystarczy teraz dodać otrzymane równości stronami. W obydwu przypadkach otrzymujemy $m+n=5$

3. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym $BC=CD$; $DE=EA$; $\measuredangle BCD=\measuredangle DEA=90°$. Wykaż, że z odcinków o długościach AC, CE, EB można zbudować trójkąt oraz wyznacz miary jego kątów, znając miarę α kata ACE i miarę β kata BEC.

Oto nasz pięciokąt:



Obróćmy trójkąt ABC o -90° wokół punktu C. Wówczas obrazem punktu B będzie punkt D, a obrazem punktu A – punkt F. Następnie obracamy trójkąt ABE o 90° wokół punktu E. Obrazem punktu A jest punkt D, a obrazem punktu B – punkt F (to, że punkt *B* wyląduje też w punkcie *F* wynika z faktu, że suma kątów *EDC, CBA* i *BAE* wynosi 360°). Szukanym trójkątem jest więc trójkąt CEF.



Obliczmy jego kąty. Kąt ECF ma miarę $90^\circ - \alpha$, kąt CEF: $90^\circ - \beta$, a kąt CFE:

$$180^\circ - (90^\circ - \alpha) - (90^\circ - \beta) = \alpha + \beta$$