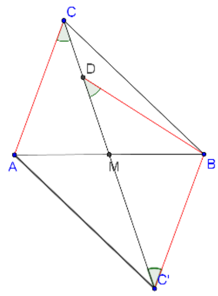
Zestaw 31

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Punkt M jest środkiem boku AB trójkąta ABC. Na środkowej CM znajduje się taki punkt D, że $AC = BD$. Udowodnij, że $\sphericalangle MCA = \sphericalangle MDB$.



Gdy w zadaniu o trójkątach pojawia się środkowa, wiele pożytku może przynieść zastosowanie symetrii środkowej.

Przekształćmy nasz trójkąt w symetrii względem punktu M. Otrzymamy wówczas równoległobok $AC'BC$. $BC' = AC = BD$, a więc trójkąt $C'BD$ jest równoramienny, z czego wynika, że kąty MDB i $MC'B$ są równe, a że $\sphericalangle MCA = \sphericalangle MC'B$, więc równe są również kąty MCA i MDB.

2. Czy istnieje taka całkowita dodatnia liczba n, że 2n jest kwadratem liczby całkowitej, zaś 1024n jest czwartą potęgą liczby całkowitej? Odpowiedź uzasadnij.

Taka liczba nie istnieje. Niech liczba n zawiera w rozkładzie na czynniki pierwsze k dwójek. Liczba k jest nieparzysta, bo $2n$ jest kwadratem liczby całkowitej. Liczba 2024n w rozkładzie na czynniki pierwsze ma $10 + k$ dwójek. $10 + k$ jest liczbą nieparzystą, nie dzieli się więc przez 4, a to decyduje, że liczba 1024n nie może być czwartą potęgą liczby całkowitej.

3. Pan Kowalski sprzedaje buty. Dziś rano przyszedł do niego klient i dość szybko zdecydował się na mokasyny za 80 zł. Wręczył panu Kowalskiemu banknot 200 zł, ale ten niestety nie miał wydać. Poszedł więc do sąsiedniego kiosku i rozmienił 200 zł. Klient zabrał buty i 120 zł reszty i poszedł. Po dziesięciu minutach do sklepu pana Kowalskiego wpadł zdenerwowany właściciel kiosku stwierdzając, że wręczony mu banknot 200 zł jest fałszywy. Niestety, klient dawno zniknął i pan Kowalski musiał oddać 200 zł z własnych pieniędzy. Pan Kowalski był smutny – dzień się tak dobrze zapowiadał, a on tyle stracił. No właśnie – ile stracił? Przyjmujemy, że buty były warte 80 zł.

Pan Kowalski stracił 200 zł. Do momentu wykrycia fałszerstwa nie ma mowy o żadnej stracie. Strata pojawia się dopiero, gdy trzeba oddać 200 zł właścicielowi kiosku.
Bilans zysków i strat pana Kowalskiego możemy opisać w tabelce:

zysk	strata
200 zł (wpłata dobrych pieniędzy do kasy p. Kowalskiego)	120 zł (reszta)
	80 (wartość butów)
	200 (dla pana z sąsiedniego kiosku)
200	400

$$200 - 120 - 80 - 200 = -200$$

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Czy istnieją takie cztery dodatnie liczby całkowite, że dowolne dwie z nich mają największy wspólny dzielnik większy od 1, a dowolne trzy z nich mają największy wspólny dzielnik równy 1? Odpowiedź uzasadnij.

Takie liczby istnieją. Są to na przykład 30, 154, 273 i 715. Jak szukać takich liczb? Niech a, b, c, d e, f będą różnymi liczbami pierwszymi. Nasze liczby możemy otrzymać na przykład jako iloczyny abc, ade, bdf, cef.

2. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x^2 = y + z \\ y^2 = z + x \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

Odejmujemy stronami drugie równanie od pierwszego i dostajemy

$$\begin{gathered} x^2 - y^2 = y - x \\ (x - y)(x + y) = y - x \\ (x - y)(x + y) + (x - y) = 0 \\ (x - y)(x + y + 1) = 0 \end{gathered}$$

Stąd wynika, że $y = x$ lub $y = -x - 1$
(1) $y = x$. Wówczas z trzeciego równania dostajemy

$$z^2 = 2x^2$$

$z = x\sqrt{2}$ lub $z = -x\sqrt{2}$

(1a) $z = x\sqrt{2}$. Wówczas pierwsze równanie przybiera postać

$$x^2 = x + x\sqrt{2}$$

To równanie ma dwa rozwiązania: 0 oraz $1 + \sqrt{2}$. Daje nam to dwie trójki spełniające nasz układ równań: (0, 0, 0) i $(1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, \sqrt{2} + 2)$.

(1b) $z = -x\sqrt{2}$. Wówczas pierwsze równanie przybiera postać

$$x^2 = x - x\sqrt{2}$$

To równanie ma dwa rozwiązania: 0 oraz $1 - \sqrt{2}$. Daje to nam dodatkowe rozwiązanie naszego układu równań: $(1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}, -\sqrt{2} + 2)$.

(2) $y = -x - 1$. Wówczas z trzeciego równania dostajemy

$$z^2 = x^2 + (-x - 1)^2 = x^2 + x^2 + 2x + 1 = 2x^2 + 2x + 1 = 2(x^2 + x + 1) - 1$$

Ponieważ z pierwszego równania $z = x^2 - y = x^2 + x + 1$, więc

$$z^2 = 2z - 1$$

Jedynym rozwiązaniem tego równania jest liczba 1.
Jeszcze raz wracamy do trzeciego równania uwzględniając, że $y = -x - 1$

$$1 = x^2 + (-x - 1)^2 = 2x^2 + 2x + 1$$
$$2x^2 + 2x = 0$$

$x = 0$ (wtedy $y = -1$) lub $x = -1$ (wtedy $y = 0$).
Ostatecznie układ równań ma pięć rozwiązań:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ y = 1 + \sqrt{2} \\ z = \sqrt{2} + 2 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} \\ y = 1 - \sqrt{2} \\ z = -\sqrt{2} + 2 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

Można sprawdzić, że wszystkie te trójki spełniają nasz układ równań.

3. Jakie są dwie ostatnie cyfry liczby 2011^{2011}. Odpowiedź uzasadnij.

To zadanie jest doskonałą okazją, by się zapoznać ze wzorem dwumianowym Newtona. Pozwala on podnieść sumę dwóch składników do dowolnej potęgi:

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n$$

Pojawiający się we wzorze symbol $\binom{n}{k}$ nazywany jest symbolem Newtona i liczy się go ze wzoru:

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Liczbę 2011^{2011} możemy zapisać tak:

$$(2010 + 1)^{2011} = 2010^{2011} + \binom{2011}{1} 2010^{2010} + \binom{2011}{2} 2010^{2009} + \cdots + 2010 + 1$$

Wszystkie składniki powyższej sumy oprócz dwóch ostatnich mają na końcu (co najmniej) dwa zera. Ostatnie więc cyfry naszej liczby to 11.