Zestaw 32

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Liczby naturalne od 1 do 101 zapisane po kolei tworzą w ten sposób liczbę. Rozstrzygnij, czy ta liczba jest złożona. Czy jest ona kwadratem pewnej liczby naturalnej?

Liczba, o której mowa w zadaniu, jest złożona, bo jest podzielna przez 3. Aby się o tym przekonać, policzmy sumę jej cyfr dodając do siebie sumy cyfr w każdej dziesiątce.
- liczby 1 – 9: $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$
- liczby 10 – 19: $10\cdot 1+1+2+3+4+5+6+7+8+9=55$
…
- liczby 90 – 99: $10\cdot 9+1+2+3+4+5+6+7+8+9=135$
- liczby 100 – 101: $3\cdot 1=3$

Ostatecznie:

$$45+55+65+75+85+95+105+115+125+135+3=903$$

Suma cyfr jest podzielna przez 3, więc nasza liczba też.
Liczba ta nie jest kwadratem liczby naturalnej. Aby tak było, w jej rozkładzie na czynniki pierwsze każdy czynnik musiałby wystąpić parzystą liczbę razy, a tymczasem trójka występuje tylko raz, bo nasza liczba jest podzielna przez 3, a nie jest podzielna przez 9 (suma cyfr nie jest podzielna przez 9).

2. Wykaż, że dla każdego $x\neq 0$ zachodzi nierówność

$$x^{10}+\frac{1}{x^{10}}+(x^2+x^4+x^6+x^8)(1+\frac{1}{x^{10}})\geq 10$$

Po usunięciu nawiasów i uporządkowaniu nasza nierówność przybierze postać:

$$x^{10}+\frac{1}{x^{10}}+x^8+\frac{1}{x^8}+x^6+\frac{1}{x^6}+x^4+\frac{1}{x^4}+x^2+\frac{1}{x^2}\geq 10$$

Udowodnimy najpierw, że $x^2+\frac{1}{x^2}\geq 2$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\geq 0$$

$$x^2+2+\frac{1}{x^2}\geq 0$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}\geq 2$$

Podobnie udowodnimy, że $x^4+\frac{1}{x^4}\geq 2,\ \ x^6+\frac{1}{x^6}\geq 2,\ \ x^8+\frac{1}{x^8}\geq 2,\ \ x^{10}+\frac{1}{x^{10}}\geq 2$

Dodając do siebie stronami te pięć nierówności dostajemy

$$x^{10} + \frac{1}{x^{10}} + x^8 + \frac{1}{x^8} + x^6 + \frac{1}{x^6} + x^4 + \frac{1}{x^4} + x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 10$$

Uwaga! Choć prawdą jest, że dla każdego $x \neq 0$

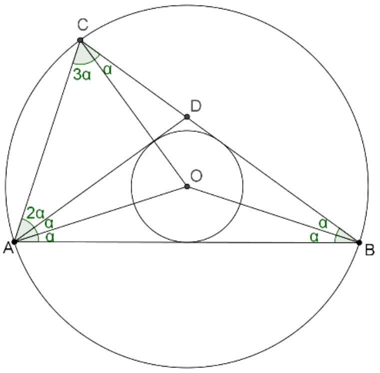
$$x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 2$$

nie jest prawdą, że dla każdego $x \neq 0$

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

Ta nierówność nie zachodzi oczywiście dla liczb ujemnych.

3. W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczną kąta AD. Wyznaczyć kąty trójkąta ABC, jeśli środek okręgu wpisanego w trójkąt ABD jest jednocześnie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC.



Uzasadnijmy oznaczenia na rysunku. Kąty BAO i OAD są równe, bo środek okręgu wpisanego jest punktem przecięcia dwusiecznych. Kąty BAD i DAC są równe, bo AD jest dwusieczną, kąty OAC i ACO są równe, bo trójkąt AOC jest równoramienny (OA i OC są promieniami okręgu opisanego). Spróbuj sam uzasadnić miarę α dla pozostałych kątów.
Dostajemy więc $10\alpha = 180°$, czyli $\alpha = 18°$. Nasz trójkąt ma więc kąty $36°, 72°, 72°$.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Wyznacz wszystkie liczby naturalne, które są 11 razy większe od sumy swych cyfr.

Bezpośrednim rachunkiem sprawdzimy, że (oprócz 0) nie ma liczby spełniającej warunki zadania wśród liczb jedno i dwucyfrowych. Dla liczb trzycyfrowych mamy:

$$100a + 10b + c = 11a + 11b + 11c$$
$$89a = b + 10c$$

Ponieważ a, b i c są cyframi, więc prawa strona równania jest dwucyfrowa, a więc $a = 1$, $b = 9$
i $c = 8$.
Rozważmy liczby więcej niż dwucyfrowe. Wówczas:

$$10^n a_n + \cdots + 1000a_3 + 100a_2 + 10a_1 + a_0 = 11a_n + \cdots + 11a_0$$
$$(10^n - 11)a_n + \cdots + 89a_2 = a_1 + 10a_0$$

Prawa strona jest dwucyfrowa, a lewa więcej niż dwucyfrowa. Mamy więc sprzeczność. Jedynym więc (poza 0) rozwiązaniem jest liczba 198.

2. Niech d_1, d_2, d_3, d_4 będą odległościami punktu wewnętrznego czworokąta wypukłego od jego wierzchołków. Wykaż, że

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \geq 2\sqrt{2S}$$

gdzie S oznacza pole czworokąta.

Wykorzystamy wzór na pole czworokąta $S = \frac{1}{2}ef \sin\alpha$, gdzie α jest kątem między przekątnymi, nierówność trójkąta oraz nierówność między średnimi.
Z powyższego wzoru na pole czworokąta oraz z faktu, że $\sin\alpha$ jest mniejszy lub równy od 1, wynika, że

$$2S \leq ef$$

Pierwiastkujemy tę nierówność i mnożymy przez 2:

$$2\sqrt{2S} \leq 2\sqrt{ef}$$

Z nierówności między średnimi:

$$2\sqrt{2S} \leq 2\sqrt{ef} \leq e + f$$

I z nierówności trójkąta:

$$2\sqrt{2S} \leq 2\sqrt{ef} \leq e + f \leq d_1 + d_2 + d_3 + d_4$$

3. Czy istnieje ostrosłup, którego podstawą jest czworokąt wypukły i którego dwie przeciwległe ściany są prostopadłe zarówno do siebie, jak i do podstawy ostrosłupa? Odpowiedź uzasadnij.

Taki ostrosłup istnieje. Najlepiej wystrugać go sobie z sześcianu, bo to nam zapewni wszystkie żądane prostopadłości. Zobacz rysunek: