Zestaw 1

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Udowodnić, że jeżeli liczby całkowite a, b, c, d spełniają warunek

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2$$

to liczba $a + b + c + d$ jest liczbą parzystą.

Liczba $a + b + c + d$ byłaby nieparzysta, gdyby nieparzysta była dokładnie jedna lub dokładnie trzy z liczb a, b, c, d. Wówczas jednak równość $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ nie mogłaby być prawdziwa, bo jedna strona byłaby parzysta, a druga nieparzysta.

2. Co ile minut długa wskazówka zegara dogania krótką?

Rozwiązanie 1:

Długa wskazówka obraca się w ciągu minuty o 6°, a krótka o $\frac{1}{2}$° (sprawdź). Oznaczmy przez t liczbę minut od jednego pokrycia się wskazówek do drugiego. Duża wskazówka w czasie t obróci się o kąt $(6t)$°, a mała o $\left(\frac{1}{2}t\right)$°. Duża wskazówka wykona obrót o 360° większy niż mała. Dostajemy więc równanie:

$$6t = \frac{1}{2}t + 360$$

$$t = 65\frac{5}{11}$$

Duża wskazówka dogania więc małą co $65\frac{5}{11}$ minuty.

Rozwiązanie 2:

W ciągu 12 godzin długa wskazówka dogoni krótką 11 razy:

$$12 \div 11 = \frac{12}{11}\text{godziny} = 65\frac{5}{11}\text{ minut}$$

3. Połowę księgarskiej półki zajmują słowniki o grubości 5 cm, a drugą połowę – encyklopedie o grubości 7 cm. Udowodnij, że na tej półce znajduje się co najmniej 12 woluminów.

Oznaczmy przez x długość połowy półki. Liczba x jest podzielna przez 5 i przez 7, jest to więc co najmniej 35. Na półce zmieści się więc co najmniej 7 słowników i co najmniej 5 encyklopedii.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Rozwiąż w liczbach całkowitych równanie:

$$x(x+1)+(x+1)(x+2)+\cdots+(x+2024)(x+2025)=2025+2024x$$

Nasze równanie nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych. Lewa strona jest sumą 2025 liczb parzystych (iloczyn dwóch kolejnych liczb jest parzysty, bo jedna z nich jest parzysta), więc jest liczbą parzystą. Prawa strona jest nieparzysta jako suma liczby nieparzystej i parzystej.

2. Czy można od sznurka o długości $\frac{16}{31}$ metra odciąć kawałek o długości $\frac{1}{2}$ metra, nie posługując się linijką?

Można. Wystarczy odciąć kawałek długości $\frac{1}{62}$ metra: $\frac{16}{31}-\frac{1}{62}=\frac{1}{2}$. Ponieważ $\frac{1}{62}=\frac{1}{32}\cdot\frac{16}{31}$ wystarczy złożyć sznurek 5 razy.

3. Skróć ułamek:

$$\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{\sqrt{-x}+\sqrt{-y}}$$

Liczby x i y są oczywiście ujemne. Zachodzi więc $x=-\left(\sqrt{-x}\right)^2$ i $y=-\left(\sqrt{-y}\right)^2$. Czyli:

$$\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{\sqrt{-x}+\sqrt{-y}}=\frac{-\left(\sqrt{-x}\right)^2-\left(\sqrt{-y}\right)^2-2\sqrt{xy}}{\sqrt{-x}+\sqrt{-y}}=\frac{-(\left(\sqrt{-x}\right)^2+\left(\sqrt{-y}\right)^2+2\sqrt{xy})}{\sqrt{-x}+\sqrt{-y}}$$

$$=\frac{-\left(\sqrt{-x}+\sqrt{-y}\right)^2}{\sqrt{-x}+\sqrt{-y}}=-\left(\sqrt{-x}+\sqrt{-y}\right)$$