Zestaw 2

KLASY PIERWSZE I DRUGIE

1. Jeśli zegar ścienny wybija godzinę szóstą w ciągu sześciu sekund, to ile czasu zużyje na wybicie godziny dwunastej?

Odpowiedź 12 sekund jest błędna. Fakt, że zegar wybija godzinę szóstą w ciągu sześciu sekund oznacza, że przerwa między kolejnymi uderzeniami trwa $\frac{6}{5}$ sekundy (jest 5 takich przerw). Godzinę dwunastą będzie więc zegar wybijał przez $11 \cdot \frac{6}{5} = 13{,}2$ sekundy.

2. W pewnym dniu trzy zegary miejskie wybiły południe - o dziwo - jednocześnie, ale tylko jeden z nich idzie jak należy, drugi spieszy się o 10 minut dziennie, trzeci zaś spóźnia się codziennie 12 minut. Po upływie ilu dni zegary te znów razem wybiją południe?

Zegar, który się spieszy wybije znów poprawnie godzinę dwunastą za 72 dni (po 6 dniach o dwunastej wybije pierwszą itd.). Zegar, który się spóźnia wybije znów poprawnie dwunastą za 60 dni. Oba razem wybiją poprawnie dwunastą za 360 dni, bo to jest najmniejsza wspólna wielokrotność liczb 72 i 60. Liczba ta jest podzielna przez 24, więc będzie to południe, a nie północ.

3. Rozwiąż w liczbach całkowitych równanie

$$x^4 - y^4 = 1223334444$$

Równanie to nie ma rozwiązań w liczbach całkowitych. Aby się o tym przekonać wystarczy rozłożyć lewą stronę na czynniki używając dwukrotnie wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów. Otrzymujemy:

$$(x^2 + y^2)(x + y)(x - y) = 1223334444$$

Jeżeli liczby x i y są tej samej parzystości lewa strona jest podzielna przez 8, a prawa nie, a jeżeli liczby x i y są różnej parzystości, lewa strona jest nieparzysta, a prawa parzysta.

KLASY TRZECIE I CZWARTE

1. Znajdź wszystkie pary liczb całkowitych (x, y) dla których $x^4 + 4y^4$ jest liczbą pierwszą.

Przekształcamy:

$$x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2 = (x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy)$$

Ponieważ chcemy dostać liczbę pierwszą więc $x^2 + 2y^2 - 2xy = 1$ lub $x^2 + 2y^2 + 2xy = 1$

Rozważmy równość $x^2+2y^2-2xy=1$. Jest ona równoważna równości $(x-y)^2+y^2=1$, która zachodzi gdy $(x-y)^2=0$ i $y^2=1$ lub $(x-y)^2=1$ i $y^2=0$.
Dostajemy więc rozwiązania: (-1, -1), (1, 1), (-1, 0), (1, 0).
Rozważmy teraz równość $x^2+2y^2+2xy=1$. Jest ona równoważna równości $(x+y)^2+y^2=1$, która zachodzi gdy $(x+y)^2=0$ i $y^2=1$ lub $(x+y)^2=1$ i $y^2=0$.
Dostajemy następujące rozwiązania: (1, -1), (-1, 1), (-1, 0), (1, 0).
Tylko dla par (-1, -1), (1, 1), (1, -1), (-1, 1) liczba x^4+4y^4 jest liczbą pierwszą.

2. Dany jest taki trójkąt ABC, że $\sphericalangle ACB=30°$. Promień okręgu opisanego na tym trójkącie jest równy R. Udowodnij, że pole trójkąta ABC jest mniejsze od R^2.

Udowodnimy najpierw, że $AB=R$. Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Kąt AOB ma 60°, bo jest to kąt środkowy oparty na tym samym łuku, co kąt ACB.
Trójkąt ABO jest więc równoboczny.
Pole trójkąta ABC jest największe, gdy jest to trójkąt prostokątny. Wtedy wartość tego pola wynosi $\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$, a to jest mniej niż R^2.

3. Niech p i q będą dwiema kolejnymi liczbami pierwszymi większymi od 2. Udowodnij, że liczba $p+q$ jest iloczynem co najmniej trzech (niekoniecznie różnych) liczb naturalnych większych od 1.

Liczba $\frac{p+q}{2}$ jest całkowita ($p+q$ jest parzyste, bo p i q są obie nieparzyste) oraz złożona (występuje między dwoma kolejnymi liczbami pierwszymi). Przyjmijmy $\frac{p+q}{2}=a\cdot b$.
Wówczas $p+q=2\cdot a\cdot b$